COLECCIÓN PRÁCTICA GUIADA · MATEMÁTICAS

Sucesiones, funciones y trigonometría

Del repaso al nivel de 4.º de ESO

Ejercicios resueltos en vídeo · Ejercicios guiados
Ejercicios de examen · Solucionario

Con el vídeo de cada ejercicio resuelto (código QR)



TodoSobresaliente
www.TodoSobresaliente.com

Sucesiones, funciones y trigonometría. Del repaso al nivel de 4.º de ESO

Primera edición, 2026
© TodoSobresaliente. Todos los derechos reservados.

ISBN (papel): [ISBN papel pendiente]
ISBN (digital): [ISBN digital pendiente]

Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin autorización del autor.

Web: www.TodoSobresaliente.com
Contacto: profesor@todosobresaliente.com

Índice

Cómo usar este cuaderno **iv**

1 Sucesiones y progresiones **1**
1 Sucesiones: términos y término general 2
2 Encontrar el término general de una sucesión 5
3 Progresión aritmética: el término general 7
4 Progresión aritmética a partir de un término cualquiera . 10
5 Suma de términos de una progresión aritmética 13
6 Progresión aritmética conocidos dos términos 16
7 Problemas de suma y diferencia en progresiones aritméticas 19
8 Progresión geométrica: razón y término general 21
9 Progresión geométrica a partir de un término cualquiera 24

2 Funciones **27**
10 Puntos en el plano cartesiano 28
11 Qué es una función: fórmula, tabla y gráfica 32
12 Dominio y recorrido a partir de la gráfica 35
13 Puntos de corte con los ejes y signo de una función 38
14 Funciones lineales: la pendiente 42
15 Funciones afines y constantes: la ordenada en el origen . 45
16 Ecuación de la recta que pasa por dos puntos 48
17 Ecuación de la recta: pendiente y ordenada en el origen . 51
18 Parábolas: hacia dónde miran y cuántas veces cortan . . . 54
19 Representar una parábola: cortes, vértice y tabla 57

3 Trigonometría **61**
20 Seno, coseno y tangente: razones directas e inversas . . . 62
21 Los dos ángulos agudos: ángulos complementarios . . . 65
22 Resolver un triángulo rectángulo: hipotenusa y un ángulo 68
23 Resolver un triángulo rectángulo: un cateto y un ángulo . 71

Examen tipo 1 **74**

Examen tipo 2 76

Solucionario 78

Resumen de reglas 89

Hoja de seguimiento 90

Recursos complementarios 91

Cómo usar este cuaderno

Este cuaderno no es una lista de enunciados con soluciones al final: es una **ruta de práctica**. Cada ficha parte de un ejercicio resuelto en un vídeo del canal y te lleva, paso a paso, a resolver tú solo un ejercicio de examen.

Para quién es

Está pensado para alumnos de **4.º de ESO**, pero empieza desde abajo. Las fichas de cada bloque van **de menos a más difíciles**: las primeras sirven para repasar lo de cursos anteriores y las últimas, igual que los dos exámenes tipo del final, tienen el nivel de un examen de 4.º. Si un bloque lo dominas, empieza por sus últimas fichas; si te cuesta, empieza por el principio.

Qué encontrarás en cada ficha

Cada ficha sigue siempre el mismo camino, y en cada paso tienes un poco menos de ayuda. El icono que va delante de cada ejercicio te dice cuánta ayuda queda: el círculo se va vaciando.

1. ● **Ejercicio resuelto**: el del vídeo, resuelto paso a paso. Escanea el QR del margen para verlo. Debajo del enunciado tienes las **matemáticas que vas a usar**, con un vídeo de repaso para cada una (también en el margen).
2. ◑ **Guiado 1**: mismo método, otros datos. Completa los huecos numerados.
3. ◔ **Guiado 2**: pasos completos para escribir en la cuadrícula de puntos y algunas pistas en forma de pregunta.
4. ○ **Ejercicio de examen**: lo resuelves tú solo en la cuadrícula. Al pie tienes el resultado final **impreso del revés**, para que no lo veas sin querer: gira el cuaderno para comprobarlo.

En el margen de cada ejercicio tienes dos casillas, □ hecho □ repasar: marca «hecho» cuando te salga y «repasar» si quieres volver a él antes del examen. La raya bajo el título también cambia con el tipo de ejercicio (gruesa, fina, de trazos o doble), así que se distinguen aunque imprimas en blanco y negro.

El solucionario

Las respuestas de todos los huecos están en el **solucionario**, al final del libro, con el mismo número de hueco. Cada ficha te dice en qué página están sus respuestas. Inténtalo antes de mirarlas: si te equivocas, vuelve al ejercicio resuelto o al vídeo.

Método de estudio recomendado

- Mira el vídeo del ejercicio resuelto y después léelo tapando cada paso: intenta anticipar el siguiente.
- Si te atascas con algo que deberías saber de antes, usa los vídeos de repaso del margen.
- No mires el solucionario hasta haber intentado el guiado al menos 10 minutos.
- El ejercicio de examen es la prueba de verdad: si te sale, la ficha está dominada.
- Salvo que el enunciado diga otra cosa, intenta hacer las cuentas sin calculadora, como en el examen.

Al final del libro tienes un resumen con las reglas y fórmulas que se usan y una hoja de seguimiento.

BLOQUE 1

Sucesiones y progresiones

FICHA 1

Sucesiones: términos y término general

Vídeo: «Sucesión, series y progresiones. Conceptos básicos. #1» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 78

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Dada la sucesión $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

a) ¿Cuál es el siguiente término? ¿Cómo se llama cada término?
b) Comprueba que su término general es $a_n = 2n - 1$ calculando a_3 y a_5.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ No hace falta nada especial: solo sustituir un número en una fórmula y operar.

Vídeo del ejercicio
«Sucesión, series y progresiones. Conceptos básicos» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-01

Solución

a) Qué es una sucesión. Una sucesión es una fila de números, uno detrás de otro, con un criterio que dice cuál es el siguiente. Aquí empieza en 1 y va de 2 en 2, así que el siguiente es el **11**.

a) Cómo se nombran los términos. Cada número es un **término**. La sucesión se nombra con una letra mayúscula (A) y cada término con la minúscula y un subíndice que dice el lugar que ocupa:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 7, \quad a_5 = 9$$

Los puntos suspensivos indican que la sucesión es **infinita**: sigue para siempre.

b) El término general. El término general a_n es una fórmula para calcular **cualquier** término sin tener que calcular todos los anteriores. La n es el lugar del término que queremos: para a_3 se cambia la n por 3.

$$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \qquad a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$$

Coinciden con el tercero y el quinto de la lista: la fórmula funciona. Con ella podemos calcular el término 1000 o el de un millón directamente.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. El término general de una sucesión es $a_n = 3n + 2$. Calcula sus cuatro primeros términos y el término 10.

1. Sustituimos la n por 1, 2, 3 y 4.

$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 =$ (1) $a_2 = 3 \cdot 2 + 2 =$ (2) $a_3 =$ (3) $a_4 =$ (4)

2. El término 10.

$a_{10} = 3 \cdot$ (5) $+ 2 =$ (6)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. El término general de una sucesión es $a_n = n^2 - 1$.

a) Escribe sus cuatro primeros términos y calcula a_{20}.
b) ¿Es 99 un término de la sucesión? ¿Cuál?

a) Primeros términos.

(1)

a) Término 20.

(2)

b) ¿Es 99 un término?. *Pista: iguala la fórmula a 99 y despeja n. Si sale un número natural, sí es un término.*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Calcula los cuatro primeros términos y el término 10 de $a_n = \dfrac{n+1}{n}$.

b) ¿Es 120 un término de la sucesión $a_n = 5n - 5$? ¿Y 72?

Resultado para comprobar: a) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$; $a_{10} = \frac{11}{10}$ b) 120 sí: $5n - 5 = 120 \Rightarrow n = 25$ (a_{25}). 72 no: saldría $n = 15{,}4$, que no es natural.

FICHA 2

Encontrar el término general de una sucesión

Vídeo: «Sucesión, series y progresiones. Conceptos básicos. #1» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 78

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe el término siguiente y el término general de cada sucesión:

a) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ b) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

c) $3, 5, 7, 9, \ldots$ d) $3, 6, 9, 12, \ldots$

Vídeo del ejercicio
«Sucesión, series y progresiones. Conceptos básicos» (desde el minuto 4:45)
todosobresaliente.com/v/funciones-02

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- Es como el lenguaje algebraico: «un número par» es $2n$, «un impar» es $2n+1$ o $2n-1$. Si dudas, repasa la ficha anterior.

Solución

La idea. Es casi un acertijo: hay que encontrar la regla y escribirla con la n, que es el lugar que ocupa cada término. Después se comprueba con un par de términos.

a) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$. Siguiente: 6. Cada término vale lo mismo que el lugar que ocupa (el primero vale 1, el segundo 2...): $a_n = n$.

b) $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$. Siguiente: 12. Son los números pares, y un número par se escribe multiplicando por 2: $a_n = 2n$. Comprobación: $a_1 = 2$, $a_3 = 6$.

c) $3, 5, 7, 9, \ldots$. Siguiente: 11. Son impares, pero **¡cuidado!**, empiezan en el 3, no en el 1. Con $2n$ el primero sería 2; sumando 1, sale 3:

$$a_n = 2n + 1 \qquad a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, \quad a_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5, \quad a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

d) $3, 6, 9, 12, \ldots$. Siguiente: 15. Va saltando de 3 en 3 (ya no son solo pares o solo impares): multiplicamos la n por 3: $a_n = 3n$. Comprobación: $a_2 = 6$, $a_3 = 9$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe el término siguiente y el término general: a) $5, 10, 15, 20, \ldots$ b) $4, 6, 8, 10, \ldots$

a) Va de 5 en 5. Siguiente: (1) . $a_n =$ (2)

b) Va de 2 en 2, pero empieza en el 4. Siguiente: (3) . Con $2n$ el primero sería 2; hay que sumar (4) : $a_n =$ (5)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe el término siguiente y el término general: a) $1, 4, 9, 16, \ldots$ b) $2, 5, 10, 17, \ldots$

a) ¿Qué tienen de especial estos números?. *Pista:* $1 = 1 \cdot 1,\ 4 = 2 \cdot 2 \ldots$

(1)

b) Compáralos con los de a).

(2)

Comprobación con el tercer término.

(3)

◯ Ejercicio de examen

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe el término general de cada sucesión y calcula su término 20:

a) $7, 9, 11, 13, \ldots$ b) $4, 7, 10, 13, \ldots$ c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

Resultado para comprobar: a) $a_n = 2n + 5,\ a_{20} = 45$ b) $a_n = 3n + 1,\ a_{20} = 61$ c) $a_n = \frac{n}{n+1},\ a_{20} = \frac{20}{21}$

FICHA 3

Progresión aritmética: el término general

Vídeo: «Sucesión Aritmética, conceptos básicos y fórmulas. #2» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 79

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) En la progresión $3, 5, 7, 9, \ldots$ calcula a_5 con la fórmula del término general.
b) Halla el término general de la progresión $8, 3, -2, -7, \ldots$ y su término 100

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Números negativos al cuadrado.** Para operar con la diferencia negativa del apartado b).

Vídeo del ejercicio «Sucesión aritmética, conceptos básicos y fórmulas» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-03

Repaso: Números negativos al cuadrado

Solución

Qué es una progresión aritmética. Una sucesión en la que cada término se obtiene **sumando** siempre la misma cantidad al anterior. Esa cantidad es la **diferencia**, d. En $3, 5, 7, 9, \ldots$ se suma 2 cada vez: $a_1 = 3$, $d = 2$.

La fórmula del término general.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

a_1 es el primer término, d la diferencia y n el lugar del término que queremos.

a) Término 5.

$$a_5 = 3 + (5-1) \cdot 2 = 3 + 4 \cdot 2 = 3 + 8 = 11$$

Se ve que está bien: después del 9 viene el 11. La fórmula sirve de verdad para términos lejanos (a_{25}, $a_{1000}\ldots$), sin sumar 2 mil veces.

b) Primer término y diferencia. $a_1 = 8$. De 8 a 3 se resta 5; de 3 a -2, otra vez 5: $d = -5$.

b) Término general.

$$a_n = 8 + (n-1) \cdot (-5)$$

La n se deja tal cual: es la fórmula que da cualquier término.

b) Término 100. Cambiamos la n por 100:

$$a_{100} = 8 + (100-1) \cdot (-5) = 8 + 99 \cdot (-5) = 8 - 495 = -487$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla el término general y el término 50 de la progresión $5, 9, 13, 17, \ldots$

1. Primer término y diferencia. $a_1 =$ (1) $\quad d = 9 - 5 =$ (2)

2. Término general.

$$a_n = 5 + (n-1)\cdot 4 = 5 + 4n - 4 = \text{(3)}$$

3. Término 50.

$$a_{50} = 4 \cdot 50 + 1 = \text{(4)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla el término general y el término 30 de la progresión $20, 17, 14, 11, \ldots$

1. Primer término y diferencia. *Pista: ¿se suma o se resta? La diferencia puede ser negativa.*

(1)

2. Término general (simplificado).

(2)

3. Término 30.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Halla el término general y el término 21 de la progresión $2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

b) ¿Es -40 un término de la progresión $20, 17, 14, 11, \ldots$? ¿Qué lugar ocupa?

Resultado para comprobar: a) $d = -\frac{1}{2}$: $a_n = 2 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5-n}{2}$; $a_{21} = -8$ b) $23 - 3n = -40 \Rightarrow n = 21$: sí, es el término 21

FICHA 4

Progresión aritmética a partir de un término cualquiera

Vídeo: «Sucesión Aritmética, conceptos básicos y fórmulas. #2» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 79

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. De una progresión aritmética sabemos que $a_4 = -7$ y que $d = -5$. Halla el término general, el primer término y el término 100.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Números negativos al cuadrado.** Para las cuentas con la diferencia negativa.

Vídeo del ejercicio «Sucesión aritmética, conceptos básicos y fórmulas» (desde el minuto 6:49)
todosobresaliente.com/v/funciones-04

Repaso: Números negativos al cuadrado

Solución

1. La fórmula con un término cualquiera. No nos dan el primer término, pero la fórmula se adapta a **cualquier** término conocido a_k:

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot d$$

Aquí conocemos el que está en el lugar 4: $k = 4$, $a_4 = -7$.

$$a_n = -7 + (n - 4) \cdot (-5)$$

2. El primer término. Cambiamos la n por 1:

$$a_1 = -7 + (1 - 4) \cdot (-5) = -7 + (-3) \cdot (-5) = -7 + 15 = 8$$

3. Con a_1, la fórmula de siempre.

$$a_n = 8 + (n - 1) \cdot (-5)$$

Las dos fórmulas parecen distintas, pero son **equivalentes**: describen la misma progresión $(8, 3, -2, -7, \dots)$.

4. Término 100 (con las dos fórmulas).

$$a_{100} = -7 + (100 - 4) \cdot (-5) = -7 - 480 = -487$$

$$a_{100} = 8 + (100 - 1) \cdot (-5) = 8 - 495 = -487$$

Sale lo mismo, como tenía que ser.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_6 = 20$ y $d = 3$. Halla el término general, a_1 y a_{40}.

1. Fórmula con el término 6.

$$a_n = 20 + (n - \underline{\quad(1)\quad}) \cdot 3 = 20 + 3n - 18 = \underline{\quad(2)\quad}$$

2. Primer término y término 40.

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 2 = \underline{\quad(3)\quad} \qquad a_{40} = 3 \cdot 40 + 2 = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_{10} = 7$ y $d = -2$. Halla el término general, a_1 y a_{25}.

1. Fórmula con el término 10 (y simplificada).

(1)

2. Primer término.

(2)

3. Término 25.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_5 = 12$ y $d = \dfrac{1}{2}$. Halla el término general, el primer término y a_{35}. Escribe los cuatro primeros términos.

Resultado para comprobar: $a_n = 12 + \dfrac{n-5}{2} = \dfrac{n+19}{2}$; $a_1 = 10$; $a_{35} = 27$; $10,\ \dfrac{21}{2},\ 11,\ \dfrac{23}{2}$

FICHA 5

Suma de términos de una progresión aritmética

Vídeo: «Sucesión Aritmética, conceptos básicos y fórmulas. #2» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 79

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Suma los cuatro primeros términos de $2, 4, 6, 8, \ldots$ a mano y con la fórmula.
b) Suma todos los números naturales del 1 al 100.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ Solo necesitas la fórmula del término general de la ficha anterior.

Vídeo del ejercicio
«Sucesión aritmética, conceptos básicos y fórmulas» (desde el minuto 12:01)
todosobresaliente.com/v/funciones-05

Solución

La fórmula de la suma. La suma de n términos consecutivos es el primero más el último, multiplicado por el número de términos y dividido entre 2:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

a) A mano y con la fórmula. A mano: $2 + 4 + 6 + 8 = 20$. Con la fórmula: el primero es 2, el último que sumamos es 8 y hay 4 términos:

$$S_4 = \frac{(2 + 8) \cdot 4}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Sale lo mismo. Con 4 términos se puede sumar a mano; con mil, solo con la fórmula.

b) La idea de Gauss. Cuenta la historia que un maestro castigó a sus alumnos a sumar del 1 al 100. Uno de ellos, Gauss, se dio cuenta de que sumando por los extremos siempre sale lo mismo:

$$1 + 100 = 101, \quad 2 + 99 = 101, \quad 3 + 98 = 101, \ \ldots$$

Con 100 números se hacen 50 parejas, todas de 101: $101 \cdot 50 = 5050$. Ese es el razonamiento de la fórmula: el primero más el último, por la mitad de los términos.

b) Con la fórmula.

$$S_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = \frac{10\,100}{2} = 5050$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula la suma de los 20 primeros términos de la progresión $3, 7, 11, 15, \ldots$

1. El último término que sumamos, a_{20}.

$$a_{20} = 3 + (20 - 1) \cdot \underline{\quad (1) \quad} = 3 + 76 = \underline{\quad (2) \quad}$$

2. La suma.

$$S_{20} = \frac{(3 + \underline{\quad (3) \quad}) \cdot 20}{2} = 82 \cdot \underline{\quad (4) \quad} = \underline{\quad (5) \quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula la suma de los 50 primeros números pares: $2+4+6+\ldots$

1. ¿Cuál es el número par que ocupa el lugar 50? *Pista: el término general de los pares es $a_n = 2n$.*

(1)

2. La suma.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Calcula la suma de los 30 primeros términos de la progresión $a_n = 5n - 2$.

b) Calcula la suma de los números impares del 1 al 99.

FICHA 6

Progresión aritmética conocidos dos términos

Vídeo: «Progresión aritmética. Ejercicios. #3» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 79

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, el término 4 vale 10 y el término 6 vale 16. Escribe la sucesión.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Las fórmulas se convierten en ecuaciones de primer grado donde la incógnita es d o a_1.

Vídeo del ejercicio
«Progresión aritmética. Ejercicios #3» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-06

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

Qué necesitamos. Para escribir una sucesión hacen falta el primer término y la diferencia. No tenemos ninguno: hay que sacarlos de los datos con las fórmulas.

1. La diferencia. La fórmula $a_n = a_k + (n-k)\cdot d$ relaciona **dos términos cualesquiera**. Llamamos $a_n = a_4 = 10$ y $a_k = a_6 = 16$:

$$10 = 16 + (4-6)\cdot d \quad \Rightarrow \quad 10 = 16 - 2d$$

Es una ecuación de primer grado con incógnita d. El 16 pasa restando y el -2 pasa dividiendo:

$$10 - 16 = -2d \;\Rightarrow\; -6 = -2d \;\Rightarrow\; d = \frac{-6}{-2} = 3$$

2. El primer término. Con $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ y el término 4:

$$10 = a_1 + (4-1)\cdot 3 = a_1 + 9 \;\Rightarrow\; a_1 = 10 - 9 = 1$$

3. La sucesión y la comprobación. Empieza en 1 y va de 3 en 3:

$$1, 4, 7, \mathbf{10}, 13, \mathbf{16}, 19, \ldots$$

El cuarto término es 10 y el sexto 16: cuadra con los datos.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_3 = 11$ y $a_7 = 23$. Escribe la sucesión.

1. La diferencia.

$$11 = 23 + (3-7)\cdot d \;\Rightarrow\; 11 - 23 = -4d \;\Rightarrow\; \underline{\ (1)\ } = -4d \;\Rightarrow\; d = \underline{\ (2)\ }$$

2. El primer término.

$$11 = a_1 + (3-1)\cdot 3 = a_1 + \underline{\ (3)\ } \;\Rightarrow\; a_1 = \underline{\ (4)\ }$$

3. La sucesión. 5, 8, $\underline{\ (5)\ }$, 14, 17, 20, 23, . . . (el séptimo es 23: cuadra)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_5 = 4$ y $a_{12} = -17$. Escribe sus cinco primeros términos.

1. La diferencia.

(1)

2. El primer término.

(2)

3. La sucesión y comprobación. *Pista: comprueba que a_{12} sale -17.*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_2 = 7$ y $a_9 = 42$. Halla la diferencia, el primer término, el término general y la suma de los 10 primeros términos.

Resultado para comprobar: $d = 5,\ a_1 = 2,\ a_n = 5n - 3,\ S_{10} = \dfrac{(2 + 47) \cdot 10}{2} = 245$

FICHA 7

Problemas de suma y diferencia en progresiones aritméticas

Vídeo: «Progresión aritmética. Ejercicios. #3» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 80

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. El primer término de una progresión aritmética es -1 y el término 15 es 27. Calcula la suma de los 15 primeros términos y la diferencia de la progresión.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar la diferencia.
- **Ecuaciones de segundo grado.** Para el apartado b) del examen, donde la incógnita es el número de términos.

Vídeo del ejercicio «Progresión aritmética. Ejercicios #3» (desde el minuto 6:15) todosobresaliente.com/v/funciones-07

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

1. La suma. Tenemos todo lo que pide la fórmula de la suma: el primero (-1), el último ($a_{15} = 27$) y el número de términos (15).

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} = \frac{(-1 + 27) \cdot 15}{2} = \frac{26 \cdot 15}{2} = 13 \cdot 15 = 195$$

2. La diferencia. Buscamos una fórmula en la que salga d y tengamos los demás datos: la del término general, con $a_{15} = 27$, $a_1 = -1$ y $n = 15$.

$$27 = -1 + (15 - 1) \cdot d \implies 27 + 1 = 14d \implies 28 = 14d \implies d = \frac{28}{14} = 2$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_1 = 4$ y $a_{10} = 31$. Calcula la suma de los 10 primeros términos y la diferencia.

1. La suma.

$$S_{10} = \frac{(4 + \underline{\quad(1)\quad}) \cdot 10}{2} = 35 \cdot \underline{\quad(2)\quad} = \underline{\quad(3)\quad}$$

2. La diferencia.

$$31 = 4 + (10 - 1) \cdot d \implies \underline{\quad(4)\quad} = 9d \implies d = \underline{\quad(5)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión aritmética, $a_1 = 50$ y $a_{20} = -26$. Calcula la suma de los 20 primeros términos y la diferencia.

1. La suma.

(1)

2. La diferencia. *Pista: cuidado con los signos al pasar el 50.*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Un teatro tiene 25 filas. La primera tiene 20 butacas y cada fila tiene 2 más que la anterior. ¿Cuántas butacas hay en la última fila? ¿Y en total?

b) ¿Cuántos términos de la progresión $5, 8, 11, \ldots$ hay que sumar para obtener 185?

Resultado para comprobar: a) $a_{25} = 20 + 24 \cdot 2 = 68$ butacas; total $S_{25} = \dfrac{(20+68)\cdot 25}{2} = 1100$

b) $S_n = \dfrac{(5+3n+2)\,n}{2} = 185 \Leftrightarrow 3n^2 + 7n - 370 = 0 \Leftrightarrow n = 10$

FICHA 8

Progresión geométrica: razón y término general

Vídeo: «Sucesión o progresión geométrica. Conceptos básicos y fórmulas. #4» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 80

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Halla la razón de las progresiones $1, 2, 4, 8, \ldots$; $1, 3, 9, 27, \ldots$ y $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

b) Escribe el término general de $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ y calcula a_{15} y a_5.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** El término general es una potencia: hay que saber operar con ellas.

Vídeo del ejercicio «Sucesión o progresión geométrica. Conceptos básicos y fórmulas» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-08

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

Qué es una progresión geométrica. Una sucesión en la que cada término se obtiene **multiplicando** el anterior siempre por el mismo número, la **razón** r. (En la aritmética se sumaba; aquí se multiplica.)

a) Las razones. $1, 2, 4, 8, \ldots$: se multiplica por 2 $\Rightarrow r = 2$. $1, 3, 9, 27, \ldots$: por 3 $\Rightarrow r = 3$.
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$: por $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow r = \frac{1}{2}$ (la razón también puede ser menor que 1).

b) El término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

b) Término 15. En vez de multiplicar 15 veces por 2, se cambia la n por 15 (con calculadora):

$$a_{15} = 2^{15-1} = 2^{14} = 16\,384$$

Las progresiones geométricas crecen muy deprisa.

b) Comprobación con el término 5.

$$a_5 = 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

Es el quinto de la lista: la fórmula funciona.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla la razón, el término general y el término 8 de $3, 6, 12, 24, \ldots$

1. Razón. $r = \dfrac{6}{3} = \underline{\ (1)\ }$ (se divide un término entre el anterior)

2. Término general.

$$a_n = \underline{\ (2)\ } \cdot 2^{n-1}$$

3. Término 8.

$$a_8 = 3 \cdot 2^{\underline{(3)}} = 3 \cdot 128 = \underline{\ (4)\ }$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla la razón, el término general y el término 6 de $81, 27, 9, 3, \ldots$

1. Razón. *Pista: ¿por qué número hay que multiplicar 81 para obtener 27?*

(1)

2. Término general.

(2)

3. Término 6.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Halla la razón, el término general y el término 7 de $2, -6, 18, -54, \ldots$

b) ¿Es 640 un término de la progresión $5, 10, 20, 40, \ldots$? ¿Qué lugar ocupa?

Resultado para comprobar: a) $r = -3$, $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$, $a_7 = 2 \cdot 729 = 1458$ b) $5 \cdot 2^{n-1} = 640 \Rightarrow 2^{n-1} = 128 = 2^7 \Rightarrow n = 8$: sí, es el término 8

FICHA 9

Progresión geométrica a partir de un término cualquiera

Vídeo: «Sucesión o progresión geométrica. Conceptos básicos y fórmulas. #4» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 81

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión geométrica, el término 4 vale 25 y la razón es 2. Halla el término general, el primer término y a_3.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Aparecen exponentes negativos: $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.
- **Suma de una progresión geométrica.** Para la suma del examen: $S_n = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$.

Vídeo del ejercicio «Sucesión o progresión geométrica. Conceptos básicos y fórmulas» (desde el minuto 6:35) todosobresaliente.com/v/funciones-09

Repaso: Propiedades de las potencias

Repaso: Suma de una progresión geométrica

Solución

1. Fórmula con un término cualquiera. Igual que en las aritméticas, la fórmula se puede escribir a partir de cualquier término conocido a_k:

$$a_n = a_k \cdot r^{\,n-k} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = 25 \cdot 2^{\,n-4}$$

2. El primer término. Cambiamos la n por 1. Un exponente negativo significa que la potencia pasa al denominador:

$$a_1 = 25 \cdot 2^{1-4} = 25 \cdot 2^{-3} = \frac{25}{2^3} = \frac{25}{8}$$

Y con él, la fórmula habitual:

$$a_n = \frac{25}{8} \cdot 2^{\,n-1}$$

3. El término 3, con las dos fórmulas.

$$a_3 = 25 \cdot 2^{3-4} = 25 \cdot 2^{-1} = \frac{25}{2} \qquad a_3 = \frac{25}{8} \cdot 2^{3-1} = \frac{25 \cdot 4}{8} = \frac{25}{2}$$

Las dos expresiones son equivalentes: dan el mismo término.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión geométrica, $a_3 = 12$ y $r = 2$. Halla el término general, el primer término y a_6.

1. Término general con el término 3.

$$a_n = 12 \cdot 2^{n-\,\text{(1)}}$$

2. Primer término.

$$a_1 = 12 \cdot 2^{1-3} = 12 \cdot 2^{-2} = \frac{12}{\text{(2)}} = \text{(3)}$$

3. Término 6.

$$a_6 = 12 \cdot 2^{6-3} = 12 \cdot 8 = \text{(4)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión geométrica, $a_4 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$. Halla el término general, el primer término y a_7.

1. Término general.

(1)

2. Primer término. *Pista:* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3$.

(2)

3. Término 7.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una progresión geométrica, $a_3 = 18$ y $a_5 = 162$.

a) Halla la razón (hay dos posibilidades) y el primer término.
b) Para la razón positiva, calcula la suma de los 6 primeros términos.

Resultado para comprobar: a) $162 = 18 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$ o $r = -3$; en los dos casos $a_1 = \dfrac{18}{9} = 2$ b) $S_6 = \dfrac{2\,(3^6 - 1)}{3 - 1} = 728$

BLOQUE 2

Funciones

FICHA 10

Puntos en el plano cartesiano

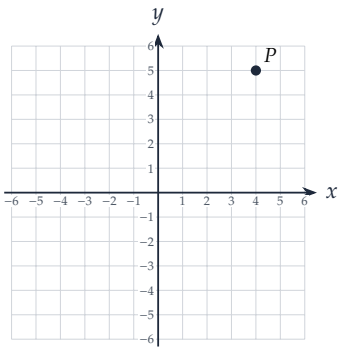
Vídeo: «Graficar puntos en el plano cartesiano. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 81

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Escribe las coordenadas del punto P.
b) Representa los puntos $Q(-2,3)$ y $R(5,-5)$.
c) ¿En qué cuadrante está cada punto?



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Números negativos al cuadrado.** Hay que saber colocar los números negativos en la recta: a la izquierda del 0 y hacia abajo.

Vídeo del ejercicio
«Graficar puntos en el plano cartesiano» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-10

Repaso: Números negativos al cuadrado

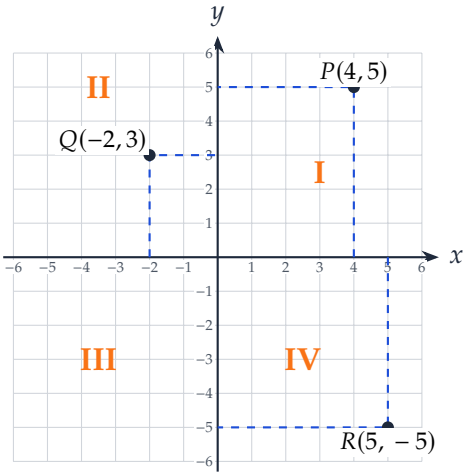
Solución

Los ejes cartesianos. Son dos rectas perpendiculares: la horizontal es el **eje** X (de abscisas) y la vertical el **eje** Y (de ordenadas). Se cortan en el **origen**, $(0,0)$, que es el punto de referencia. Se dividen en unidades iguales (en el cuaderno, los cuadritos). A la derecha y hacia arriba, positivos; a la izquierda y hacia abajo, negativos.

a) Coordenadas de P. Desde P bajamos una vertical hasta el eje X (corta en 4) y trazamos una horizontal hasta el eje Y (corta en 5). Las coordenadas se escriben entre paréntesis y **el orden importa**: primero la x y después la y.

$$P(4,5)$$

b) Representar $Q(-2,3)$ y $R(5,-5)$. Para Q: buscamos el -2 en el eje X y subimos; buscamos el 3 en el eje Y y vamos en horizontal. Donde se cortan, está Q. Igual con R: 5 en el eje X y -5 en el eje Y.



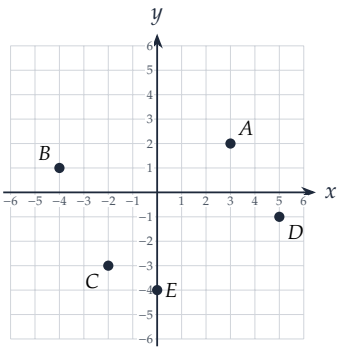
c) Cuadrantes. Los ejes dividen el plano en cuatro cuadrantes (I, II, III y IV, en sentido contrario a las agujas del reloj): P en el I, Q en el II y R en el IV.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

Escribe las coordenadas de los puntos de la figura y di en qué cuadrante está cada uno.



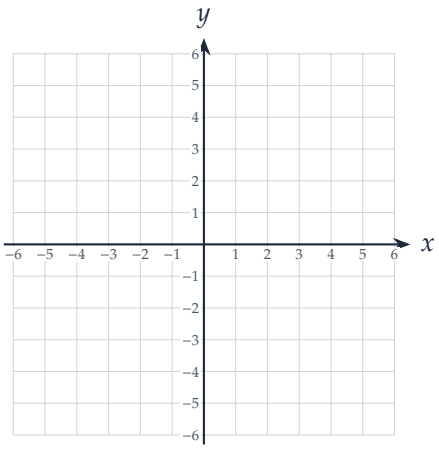
1. Primero la x, después la y. $A(3,$ (1) $)$ $B($ (2) $, 1)$ $C($ (3) , (4) $)$ $D(5,$ (5) $)$ $E(0, -4)$

2. Cuadrantes. A: I B: (6) C: (7) D: IV E: no está en ningún cuadrante, está sobre el eje (8)

Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Representa los puntos $E(3,-2)$, $F(-4,-1)$, $G(0,3)$ y $H(-2,0)$ y di dónde está cada uno.



1. ¿Hacia dónde te mueves para cada punto? *Pista: si una coordenada es 0, el punto está sobre un eje.*

(1)

2. Cuadrante o eje de cada punto.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Representa $A(1,2)$, $B(5,2)$, $C(5,5)$ y $D(1,5)$ y únelos en orden. ¿Qué figura sale? ¿Cuál es su área?
b) Escribe el punto simétrico de $(3,-4)$ respecto al eje X y respecto al eje Y.

Resultado para comprobar: a) Un rectángulo de 4×3 unidades: área 12 unidades cuadradas
b) Respecto al eje X: $(3,4)$; respecto al eje Y: $(-3,-4)$

FICHA 11

Qué es una función: fórmula, tabla y gráfica

Vídeo: «Funciones, conceptos básicos #1. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 81

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. A cada número x le asignamos su doble.

a) Escribe la función con lenguaje algebraico.
b) Haz una tabla de valores y dibuja su gráfica.
c) Usa la gráfica para saber qué valor de y le corresponde a $x = -3$.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ Necesitas representar puntos en el plano cartesiano (ficha anterior).

Vídeo del ejercicio
«Funciones, conceptos básicos #1» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-11

Solución

Qué es una función. Una función es una relación entre dos conjuntos de números: a cada valor de x le corresponde un valor de y. Aquí, al 1 le corresponde el 2; al 2, el 4; al 3, el 6...

a) Lenguaje algebraico. La y es el doble de la x:

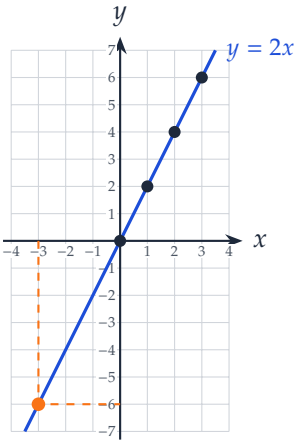
$$y = 2x \qquad \text{o también} \qquad f(x) = 2x$$

b) Tabla de valores. Elegimos valores de x y calculamos su y:

x	0	1	2	3
$y = 2x$	0	2	4	6

Cada pareja es un punto: $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$. Los representamos y los unimos. Aquí sale una recta (para una recta bastaría con dos puntos).

b) y c) La gráfica.



c) Leer la gráfica. Desde $x = -3$ bajamos en vertical hasta la recta y desde allí vamos en horizontal al eje Y: llegamos a $y = -6$ (en naranja). Coincide con la fórmula: $2 \cdot (-3) = -6$.

La fórmula y la gráfica contienen la misma información sobre la función: son dos formas de representarla.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Para la función $y = 3x - 1$:

a) Completa la tabla de valores.
b) ¿Pasa su gráfica por el punto $(3, 8)$?

a) Tabla.

x	-1	0	1	2
$y = 3x - 1$	(1)	(2)	(3)	(4)

b) El punto $(3, 8)$. $y = 3 \cdot 3 - 1 =$ (5) : como sale 8, el punto (6) está en la gráfica.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Para la función $f(x) = x^2 - 2$:

a) Haz una tabla de valores para $x = -2, -1, 0, 1, 2$.
b) ¿Cuánto vale $f(-3)$? ¿Qué forma tendrá la gráfica, una recta?

a) Tabla de valores. *Pista: un número negativo al cuadrado es positivo:* $(-2)^2 = 4$.

(1)

b) $f(-3)$.

(2)

b) ¿Es una recta?.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Dada la función $f(x) = -2x + 4$:

a) Calcula $f(0)$, $f(3)$ y $f(-1)$.
b) ¿Para qué valor de x vale 0 la función?
c) ¿Pertenece el punto $(5, -6)$ a su gráfica?

Resultado para comprobar: a) $f(0) = 4$, $f(3) = -2$, $f(-1) = 6$ b) $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ c) Sí: $f(5) = -10 + 4 = -6$

FICHA 12

Dominio y recorrido a partir de la gráfica

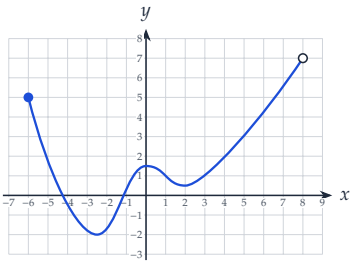
Vídeo: «Funciones, conceptos básicos #1. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 82

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

Halla el dominio y el recorrido de la función de la gráfica. El punto relleno pertenece a la gráfica; el hueco, no.



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Intervalos.** El dominio y el recorrido se escriben como intervalos, con corchetes o paréntesis.

Vídeo del ejercicio «Funciones, conceptos básicos #1» (desde el minuto 7:38)
todosobresaliente.com/v/funciones-12

Repaso: Intervalos

Solución

Cómo es la gráfica. Empieza en el punto $(-6, 5)$, que está relleno (pertenece a la gráfica). Baja hasta $y = -2$, sube un poco, baja un poco y vuelve a subir hasta $(8, 7)$, que está hueco (no pertenece).

Dominio: mirar el eje X. El **dominio** son los valores de x que toma la función. Mirando el eje X, la gráfica va desde -6 hasta 8; fuera de ahí no existe.

$$\text{Dom } f = [-6, 8)$$

El -6 con corchete, porque ese punto pertenece; el 8 con paréntesis, porque el punto es hueco.

Recorrido: mirar el eje Y. El **recorrido** son los valores de y. El punto más bajo está a la altura -2 y el más alto a la altura 7 (pero ese punto es hueco):

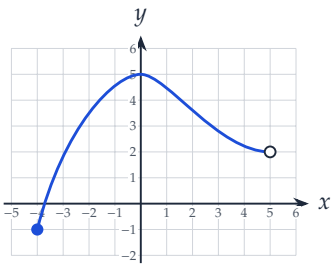
$$\text{Rec } f = [-2, 7)$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

Halla el dominio y el recorrido de esta función.



1. Dominio (eje X). Empieza en $x =$ (1) (relleno) y acaba en $x =$ (2) (hueco): Dom $f =$ (3)

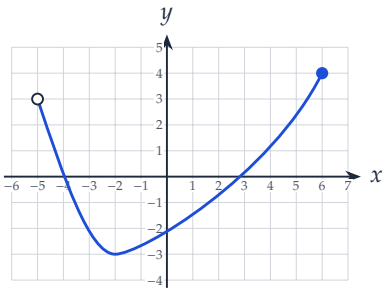
2. Recorrido (eje Y). Lo más bajo: $y =$ (4); lo más alto: $y =$ (5): Rec $f =$ (6)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

Halla el dominio y el recorrido de esta función.



1. Dominio.

(1)

2. Recorrido. *Pista: el punto hueco no es el más alto de la gráfica: ¿importa entonces que esté hueco?*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla el dominio y el recorrido de:

a) El segmento que une los puntos $(-2,-3)$ y $(3,7)$, con los dos extremos incluidos.
b) La función $f(x) = x^2$ (piensa en su tabla de valores).

Resultado para comprobar: a) $\mathrm{Dom} = [-2,3]$, $\mathrm{Rec} = [-3,7]$ b) $\mathrm{Dom} = \mathbb{R}$, $\mathrm{Rec} = [0,+\infty)$: un cuadrado nunca es negativo

FICHA 13

Puntos de corte con los ejes y signo de una función

Vídeo: «Funciones, conceptos básicos #1. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 82

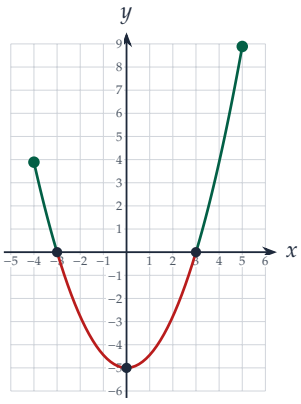
● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

La función de la gráfica va de $x = -4$ a $x = 5$.

a) Escribe sus puntos de corte con los ejes.
b) ¿Dónde es positiva y dónde negativa?



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Intervalos.** Los trozos donde es positiva o negativa se escriben como intervalos.
- **Ecuaciones de segundo grado.** Para los cortes con el eje X del examen, que salen de una ecuación.

Solución

a) Cortes con el eje X. Son los puntos donde la gráfica cruza el eje horizontal. Allí la altura es 0, así que su y vale 0:

$$(-3, 0) \qquad \text{y} \qquad (3, 0)$$

a) Corte con el eje Y. Donde cruza el eje vertical. Allí la x vale 0: $(0, -5)$. Con el eje Y hay **como mucho un** corte: una función no puede tener dos valores de y para el mismo x.

b) Signo. La función es **positiva** donde la gráfica está por encima del eje X (en verde) y **negativa** donde está por debajo (en rojo). Los intervalos se dan siempre con los valores de x:

$$\text{Positiva: } [-4, -3) \cup (3, 5] \qquad \text{Negativa: } (-3, 3)$$

Vídeo del ejercicio
«Funciones, conceptos básicos #1» (desde el minuto 10:49)
todosobresaliente.com/v/funciones-13

Repaso: Intervalos

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

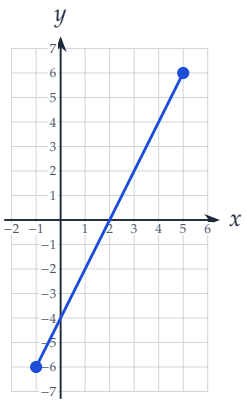
Los extremos -4 y 5 entran (los puntos están rellenos y son positivos). En -3 y 3 la función vale 0, que no es ni positivo ni negativo: van con paréntesis en los dos intervalos.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

La gráfica es la recta $y = 2x - 4$ entre $x = -1$ y $x = 5$. Halla sus cortes con los ejes y su signo.



1. Cortes. Con el eje X: (__(1)__, 0). Con el eje Y: (0, __(2)__).

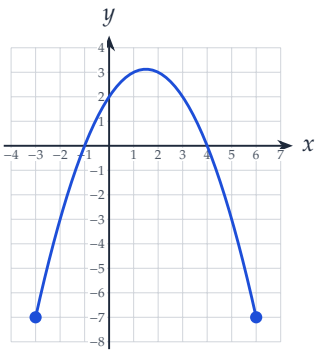
2. Signo. Negativa: [__(3)__, 2) Positiva: (2, __(4)__]

Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

La función de la gráfica va de $x = -3$ a $x = 6$. Halla sus cortes con los ejes y su signo.



1. Cortes con los ejes.

(1)

2. Dónde es positiva.

(2)

3. Dónde es negativa. *Pista: hay dos trozos por debajo del eje: se unen con ∪.*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Sin dibujarla, halla los puntos de corte con los ejes de $f(x) = x^2 - 4x$ y estudia su signo. (Pista: es una parábola que mira hacia arriba.)

Resultado para comprobar: Eje X: $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$: $(0,0)$ y $(4,0)$. Eje Y: $(0,0)$. Positiva: $(-\infty,0) \cup (4,+\infty)$; negativa: $(0,4)$.

FICHA 14

Funciones lineales: la pendiente

Vídeo: «Representación gráfica funciones lineales y afines. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 82

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Representa las funciones lineales $y = 2x$, $y = x$ e $y = -3x$. ¿Qué indica la pendiente de cada una?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- Necesitas hacer tablas de valores y representar puntos (fichas anteriores).

Vídeo del ejercicio
«Representación gráfica funciones lineales y afines» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-14

Solución

Funciones lineales. Tienen la forma $y = mx$, donde m es la **pendiente**. Su gráfica es una recta, y para dibujar una recta bastan **dos puntos**, que sacamos de una tabla de valores (los valores de x los elegimos nosotros).

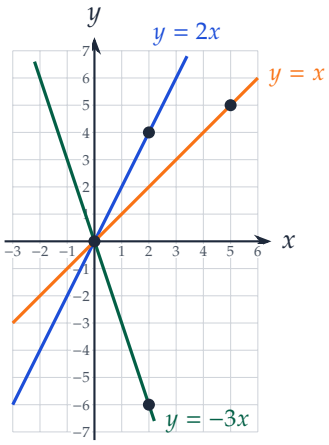
Tablas de valores.

x	0	2
$y = 2x$	0	4

x	0	5
$y = x$	0	5

x	0	2
$y = -3x$	0	-6

Representamos los puntos y los unimos con la regla:



Todas pasan por el origen. Todas las funciones lineales pasan por $(0, 0)$: si $x = 0$, entonces $y = m \cdot 0 = 0$.

Qué indica la pendiente. Imagina un muñequito que recorre la recta de izquierda a derecha:

- $y = 2x$ ($m = 2$) sube más empinada que $y = x$ ($m = 1$): cuanto mayor es la pendiente, más inclinada (más vertical) es la recta.

- $y = -3x$ ($m = -3$) va **cuesta abajo**: una pendiente negativa significa que la recta baja (la función es decreciente).

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Haz una tabla de valores con $x = 0$ y $x = 2$ para $y = 4x$ e $y = -\frac{x}{2}$. ¿Cuál sube y cuál baja?

1. Tablas. $y = 4x$: $(0, 0)$ y $(2, __(1)__)$ $y = -\frac{x}{2}$: $(0, 0)$ y $(2, __(2)__)$

2. Pendientes. $y = 4x$: $m =$ __(3)__, positiva, la recta __(4)__. $y = -\frac{x}{2}$: $m =$ __(5)__, negativa, la recta __(6)__.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Para $y = \frac{x}{3}$ e $y = -2x$: haz una tabla con dos puntos de cada una, di su pendiente y cuál de las dos está más inclinada.

1. Tablas. *Pista: en $y = \frac{x}{3}$ elige un valor de x que se pueda dividir entre 3.*

(1)

2. Pendientes y crecimiento.

(2)

3. ¿Cuál está más inclinada?.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Dadas las rectas $y = 5x$, $y = -x$ e $y = \dfrac{x}{2}$:

a) ¿Cuáles son crecientes? Ordénalas de más a menos inclinada.
b) ¿Pasa la recta $y = -x$ por el punto $(3, -3)$? ¿Qué punto tienen en común las tres?

Resultado para comprobar: a) Crecientes: $y = 5x$ e $y = \frac{x}{2}$. Más a menos inclinada: $y = 5x$, $y = -x$, $y = \frac{x}{2}$ b) Sí: $-3 = -(3)$. Las tres pasan por $(0, 0)$

FICHA 15

Funciones afines y constantes: la ordenada en el origen

Vídeo: «Representación gráfica funciones lineales y afines. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 83

Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Representa las funciones afines $y = x + 2$ e $y = x - 3$, y las funciones constantes $y = 3$, $y = 2$ e $y = -1$. ¿Qué tienen en común $y = x + 2$ e $y = x - 3$?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ Repasa la ficha anterior: tabla de valores y pendiente.

Vídeo del ejercicio
«Representación gráfica funciones lineales y afines» (desde el minuto 6:50)
todosobresaliente.com/v/funciones-15

Solución

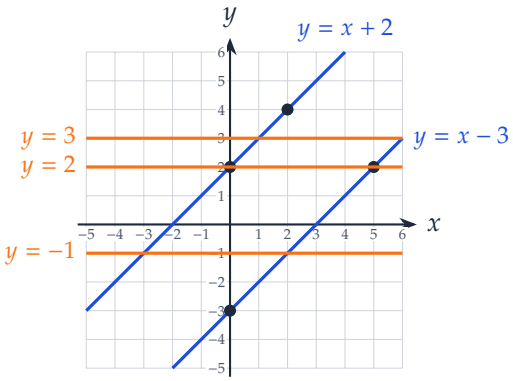
Funciones afines. Tienen la forma $y = mx + n$: la pendiente m, como antes, y un número más, n, la **ordenada en el origen**. La n dice dónde corta la recta al eje Y (las lineales cortaban siempre en el 0).

Tablas de valores. $y = x + 2$: si $x = 0$, $y = 2$; si $x = 2$, $y = 4$. Puntos $(0, 2)$ y $(2, 4)$.

$y = x - 3$: si $x = 0$, $y = -3$; si $x = 5$, $y = 2$. Puntos $(0, -3)$ y $(5, 2)$.

Con $x = 0$ sale siempre $y = n$: ese es el corte con el eje Y.

Funciones constantes. Si $m = 0$ queda solo $y = n$, por ejemplo $y = 3$. La y no depende de la x: **siempre** vale 3, sea cual sea la x. Su gráfica es una recta horizontal (pendiente 0) a la altura 3.



Qué tienen en común. $y = x + 2$ e $y = x - 3$ tienen la misma pendiente ($m = 1$): la misma inclinación, así que son **paralelas**. Solo cambia la altura a la que cortan al eje Y.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Para la recta $y = 2x - 1$: di su pendiente y su ordenada en el origen y calcula dos puntos.

1. Pendiente y ordenada en el origen. $m =$ (1) $n =$ (2) (corta al eje Y en $(0, -1)$)

2. Dos puntos. Si $x = 0$: $y =$ (3). Si $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 - 1 =$ (4).

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Compara las rectas $y = -x + 4$, $y = -x - 2$ e $y = -2$.

1. Pendiente y ordenada en el origen de cada una.

(1)

2. ¿Cuáles son paralelas? ¿Por qué?.

(2)

3. ¿Cómo es la gráfica de $y = -2$?.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Halla los puntos de corte con los ejes de $y = 3x - 6$.
b) ¿Es paralela a la recta $y = 3x + 1$? ¿Por qué?
c) Escribe la ecuación de la recta horizontal que pasa por $(5, -4)$.

Resultado para comprobar: a) Eje Y: $(0, -6)$; eje X: $3x - 6 = 0 \Rightarrow (2, 0)$ b) Sí: las dos tienen pendiente 3 c) $y = -4$

FICHA 16

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Vídeo: «Recta que pasa por dos puntos. Punto pendiente. Fórmulas y ejemplos.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 83

Ejercicio resuelto

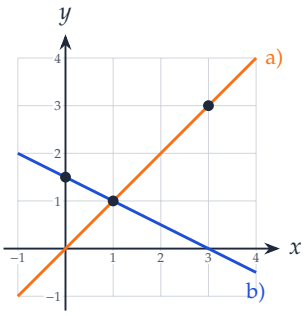
● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

Halla la ecuación de las dos rectas de la gráfica:

a) La que pasa por $(1, 1)$ y $(3, 3)$.

b) La que pasa por $(1, 1)$ y $(0;\ 1{,}5)$.



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para quitar denominadores y despejar la y.

Vídeo del ejercicio
«Recta que pasa por dos puntos. Punto pendiente» (desde el minuto 2:37)
todosobresaliente.com/v/funciones-16

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

La fórmula. Es el ejercicio contrario al de las fichas anteriores: nos dan la gráfica (o dos puntos) y buscamos la ecuación. Con dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

a) $A(1, 1)$ **y** $B(3, 3)$**.**

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-1}{3-1} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow y = x$$

b) $A(1, 1)$ **y** $B(0;\ 1{,}5)$**.**

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-1}{1{,}5-1} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{0{,}5}$$

Quitamos denominadores multiplicando en cruz (cada denominador pasa multiplicando al otro lado):

$$0{,}5\,(x-1) = -1\,(y-1) \Rightarrow 0{,}5x - 0{,}5 = -y + 1$$

Despejamos la y:

$$y = -0{,}5x + 0{,}5 + 1 \Rightarrow y = -0{,}5x + 1{,}5$$

b) Comprobación. $n = 1{,}5$ es justo donde corta al eje Y, y la pendiente $m = -0{,}5$ es negativa porque la recta va cuesta abajo. Cuadra con la gráfica.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1,3)$ y $B(3,7)$.

1. Sustituimos en la fórmula.

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{7-3} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{\text{(1)}}$$

2. Multiplicamos en cruz.

$$4(x-1) = 2(y-3) \Rightarrow 4x - 4 = \text{(2)}$$

3. Despejamos la y.

$$2y = 4x + \text{(3)} \Rightarrow y = \text{(4)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(-1,4)$ y $B(2,-2)$.

1. Sustituimos en la fórmula. *Pista:* $x - x_1 = x - (-1) = x + 1$.

(1)

2. Quitamos denominadores.

(2)

3. Despejamos la y y comprobamos con B.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(2,5)$ y $(6,7)$.
b) ¿Y la de la recta que pasa por $(-3,1)$ y $(1,1)$? ¿Qué tiene de especial?

Resultado para comprobar: a) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} + 4$ b) Los dos puntos tienen $y = 1$: es la recta horizontal $y = 1$ (pendiente 0)

FICHA 17

Ecuación de la recta: pendiente y ordenada en el origen

Vídeo: «Recta que pasa por dos puntos. Punto pendiente. Fórmulas y ejemplos.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 83

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(1,1)$ y $B(0;\ 1{,}5)$ calculando primero la pendiente y después la ordenada en el origen.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para calcular n, que sale de una ecuación de primer grado.

Solución

La pendiente. La pendiente es lo que crece la y cuando crece la x: lo que avanzo en vertical dividido entre lo que avanzo en horizontal. Si sube mucho avanzando poco, la recta es muy empinada.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}5 - 1}{0 - 1} = \frac{0{,}5}{-1} = -0{,}5$$

La ordenada en el origen. Sustituimos m en $y = mx + n$:

$$y = -0{,}5x + n$$

Para hallar n usamos que la recta pasa por $A(1,1)$: ese punto cumple la ecuación. Cambiamos la x por 1 y la y por 1:

$$1 = -0{,}5 \cdot 1 + n \implies 1 + 0{,}5 = n \implies n = 1{,}5$$

La ecuación.

$$y = -0{,}5x + 1{,}5$$

Es la misma que con la fórmula de los dos puntos (ficha anterior). Este método no obliga a memorizar dónde va cada x_1, x_2…: basta con entender qué es la pendiente.

Vídeo del ejercicio
«Recta que pasa por dos puntos. Punto pendiente» (desde el minuto 11:29)
todosobresaliente.com/v/funciones-17

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(2,1)$ y $B(4,7)$.

1. Pendiente.

$$m = \frac{7-1}{4-2} = \frac{(1)}{2} = \underline{\quad(2)\quad}$$

2. Ordenada en el origen con el punto $A(2,1)$.

$$1 = 3 \cdot 2 + n \implies n = 1 - 6 = \underline{\quad(3)\quad}$$

3. Ecuación.

$$y = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla la ecuación de la recta que pasa por $A(-2,5)$ y $B(4,2)$.

1. Pendiente.

(1)

2. Ordenada en el origen. *Pista: usa el punto A; cuidado:* $-\frac{1}{2} \cdot (-2) = +1$.

(2)

3. Ecuación y comprobación con B.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Halla la ecuación de la recta de pendiente 4 que pasa por $(1, -2)$.
b) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(0, 3)$ y $(6, 0)$. ¿Está el punto $(2, 2)$ en esa recta?

Resultado para comprobar: a) $-2 = 4 + n \Rightarrow y = 4x - 6$ b) $m = -\frac{1}{2}$, $n = 3$: $y = -\frac{x}{2} + 3$; sí: $-1 + 3 = 2$

FICHA 18

Parábolas: hacia dónde miran y cuántas veces cortan

Vídeo: «Función cuadrática. Parábolas. Tipos de gráficas. Aprende matemáticas. Todosobresaliente.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 84

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) ¿Cómo se sabe, antes de dibujarla, si una parábola $y = ax^2 + bx + c$ mira hacia arriba o hacia abajo y cuántas veces corta al eje X? Dibuja los seis tipos posibles.

b) ¿Cómo es la parábola $y = 2x^2 + 3x - 1$?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de segundo grado.** Los cortes con el eje X son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$.

Vídeo del ejercicio «Función cuadrática. Parábolas. Tipos de gráficas» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/funciones-18

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

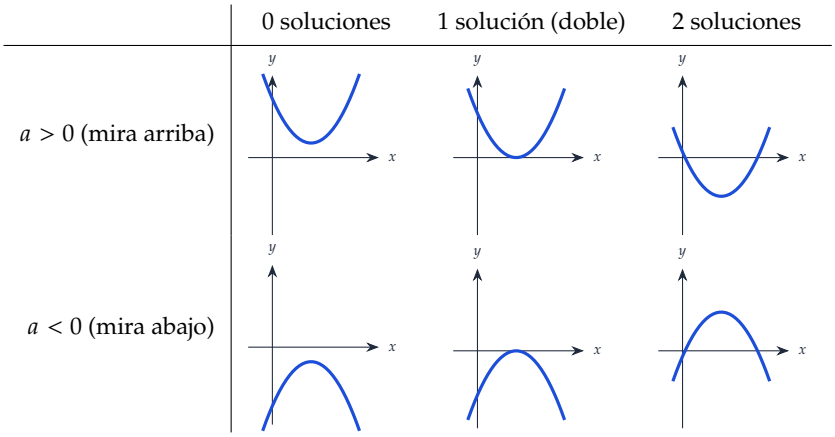
Solución

Función cuadrática. Es la función $y = ax^2 + bx + c$ (o $f(x) = ax^2 + bx + c$). Su gráfica es una **parábola**.

a) Primer criterio: el signo de a. Si $a > 0$, la parábola mira hacia arriba; si $a < 0$, mira hacia abajo.

a) Segundo criterio: los cortes con el eje X. Se obtienen igualando $y = 0$, es decir, resolviendo la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Puede tener 0 soluciones (no corta al eje X), una solución doble (lo toca en un punto, el vértice) o dos soluciones (lo corta en dos puntos).

a) Los seis tipos.



b) $y = 2x^2 + 3x - 1$. $a = 2 > 0$: mira hacia arriba. Cortes: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$: dos soluciones, corta dos veces al eje X. Es la tercera de la primera fila.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Sin dibujarlas, di hacia dónde miran y cuántas veces cortan al eje X: a) $y = x^2 - 4$ b) $y = -x^2 + 2x - 1$

a) $y = x^2 - 4$. $a = 1$: mira hacia __(1)__. $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x =$ __(2)__: corta __(3)__ veces.

b) $y = -x^2 + 2x - 1$. $a = -1$: mira hacia __(4)__. $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2} = \dfrac{-2 \pm 0}{-2} =$ __(5)__: solución doble, lo toca en __(6)__ punto.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Sin dibujarlas, di hacia dónde miran y cuántas veces cortan al eje X: a) $y = 2x^2 + 3$ b) $y = -x^2 + x + 6$

a) $y = 2x^2 + 3$. *Pista: ¿puede ser x^2 un número negativo?*

(1)

b) $y = -x^2 + x + 6$.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Sin dibujarlas, di hacia dónde miran y en qué puntos cortan al eje X:

a) $y = x^2 - 6x + 9$ b) $y = -3x^2 + 2x - 5$ c) $y = x^2 - x - 12$

Resultado para comprobar: a) Arriba; un punto (solución doble): $(3, 0)$ b) Abajo; no corta ($4 - 60 < 0$) c) Arriba; dos puntos: $(-3, 0)$ y $(4, 0)$

FICHA 19

Representar una parábola: cortes, vértice y tabla

Vídeo: «Función cuadrática. Parábolas. Tipos de gráficas. Aprende matemáticas. Todosobresaliente.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 84

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Representa la función cuadrática $y = x^2 + x + 1$.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de segundo grado.** Para los cortes con el eje X.
- **Sumar y restar fracciones.** Para la y del vértice, que sale con fracciones.

Vídeo del ejercicio
«Función cuadrática. Parábolas. Tipos de gráficas» (desde el minuto 5:32)
todosobresaliente.com/v/funciones-19

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Repaso: Sumar y restar fracciones

Solución

0. Hacia dónde mira. $a = 1 > 0$: hacia arriba.

1. Cortes con el eje X ($y = 0$).

$$x^2 + x + 1 = 0 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

La raíz de un número negativo no existe: **no corta** al eje X. Es una parábola hacia arriba que no toca el eje.

2. Corte con el eje Y ($x = 0$). $y = 0^2 + 0 + 1 = 1$: el punto $(0, 1)$.

3. El vértice.

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2} \qquad y_V = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{3}{4}$$

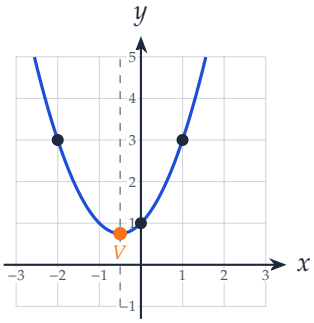
$V\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$: un poco a la izquierda del eje Y y casi a la altura 1.

4. Tabla de valores. Damos valores a un lado y otro del vértice:

$$f(1) = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad f(-2) = (-2)^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$$

Salen iguales porque son **simétricos** respecto al vértice: el 1 y el -2 están los dos a una distancia de 1,5 de $x = -\frac{1}{2}$.

5. La gráfica.



Pasa por el vértice (en naranja), por $(0,1)$, $(1,3)$ y $(-2,3)$, mira hacia arriba y no corta al eje X, como habíamos previsto. Cuantos más puntos, mejor sale.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla los elementos para representar $y = x^2 - 2x - 3$.

1. Cortes con el eje X.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = \underline{\ (1)\ } \text{ y } x = \underline{\ (2)\ }$$

2. Corte con el eje Y. $(0, \underline{\ (3)\ })$

3. Vértice. $x_V = \dfrac{2}{2} = 1, \quad y_V = 1 - 2 - 3 = \underline{\ (4)\ }$

4. Dos puntos más. $f(-2) = 4 + 4 - 3 = \underline{\ (5)\ }$ $\quad f(4) = \underline{\ (6)\ }$ (simétricos respecto a $x = 1$)

Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Representa $y = -x^2 + 4x$.

1. Hacia dónde mira y cortes con los ejes.

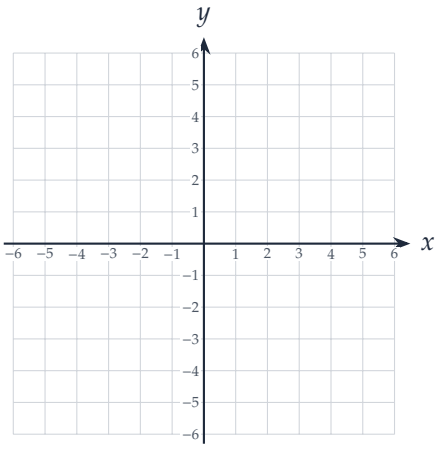
(1)

2. Vértice.

(2)

3. Tabla de valores y gráfica. *Pista: prueba con $x = -1$ y $x = 5$; no caben todos los puntos en la cuadrícula, dibuja hasta donde llegues.*

(3)



◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Halla los cortes con los ejes y el vértice, y di hacia dónde mira:
a) $y = x^2 + 4x + 4$ b) $y = -x^2 + 2x - 3$

Resultado para comprobar: a) Arriba; eje X: $(-2, 0)$ (doble); eje Y: $(0, 4)$; $V(-2, 0)$ b) Abajo; no corta al eje X; eje Y: $(0, -3)$; $V(1, -2)$

BLOQUE 3

Trigonometría

FICHA 20

Seno, coseno y tangente: razones directas e inversas

Vídeo: «Funciones trigonométricas, conceptos básicos.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 85

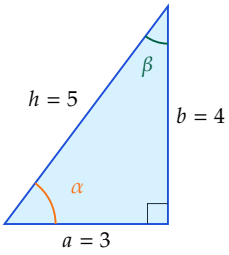
● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

En el triángulo rectángulo de la figura:

a) Calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo α.
b) Calcula la cosecante, la secante y la cotangente de α.



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Dividir fracciones.** Para la tangente como seno entre coseno, que es una división de fracciones.
- **Teorema de Pitágoras.** Para el guiado 2 y el examen, donde falta un lado: $h^2 = a^2 + b^2$.

Vídeo del ejercicio «Funciones trigonométricas, conceptos básicos» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-20

Repaso: Dividir fracciones

Repaso: Teorema de Pitágoras **[VÍDEO PENDIENTE]**

Solución

El triángulo rectángulo. Tiene un ángulo recto y dos agudos (α y β). Los lados que forman el ángulo recto son los **catetos** (a y b) y el que queda enfrente es la **hipotenusa** (h). Respecto a α: el cateto **contiguo** es el que lo toca (a) y el **opuesto** el que le queda enfrente (b).

a) Las razones directas.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h} = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h} = \frac{3}{5}$$

Truco: **coseno, contiguo**; el seno, el opuesto. El seno y el coseno son números (siempre entre −1 y 1).

a) La tangente, de dos formas.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{4}{3} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4\cdot 5}{5\cdot 3} = \frac{4}{3}$$

b) Las razones inversas (o recíprocas). Son las directas dadas la vuelta (numerador por denominador):

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{5}{4} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{5}{3} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4}$$

¡Ojo!: la inversa del **seno** es la **cosecante** y la del **coseno** es la **secante**, aunque parezca al revés.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En un triángulo rectángulo, el cateto contiguo a α mide 5, el opuesto 12 y la hipotenusa 13. Calcula las seis razones trigonométricas de α.

1. Directas.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{\text{(1)}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{(2)}}{13} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \text{(3)}$$

2. Inversas: dar la vuelta.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \text{(4)} \qquad \sec\alpha = \text{(5)} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \text{(6)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En un triángulo rectángulo, el cateto contiguo a α mide 8 cm y el opuesto 6 cm. Calcula la hipotenusa y las seis razones de α.

1. Hipotenusa. *Pista: teorema de Pitágoras:* $h^2 = a^2 + b^2$.

(1)

2. Razones directas (simplificadas).

(2)

3. Razones inversas.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 7 cm (el opuesto a α) y 24 cm. Calcula la hipotenusa y las seis razones trigonométricas de α.

Resultado para comprobar: $h = 25$ cm; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25}$, $\cos\alpha = \frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{25}{7}$, $\sec\alpha = \frac{25}{24}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{24}{7}$

FICHA 21

Los dos ángulos agudos: ángulos complementarios

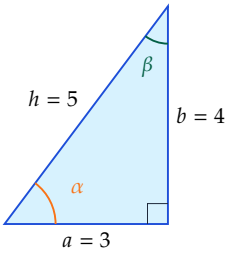
Vídeo: «Funciones trigonométricas, conceptos básicos.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 85

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

En el mismo triángulo de lados 3, 4 y 5, calcula las razones trigonométricas directas e inversas del ángulo β. Compáralas con las de α (sen $\alpha = \frac{4}{5}$, cos $\alpha = \frac{3}{5}$, tg $\alpha = \frac{4}{3}$).



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ Usa las definiciones de la ficha anterior.

Vídeo del ejercicio
«Funciones trigonométricas, conceptos básicos» (desde el minuto 10:58)
todosobresaliente.com/v/funciones-21

Solución

1. Opuesto y contiguo cambian. Las definiciones son las mismas, pero ahora miramos desde β: su cateto opuesto es $a = 3$ y su contiguo $b = 4$. Lo que es opuesto para α es contiguo para β, y al revés.

2. Razones directas de β.

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$$

3. Razones inversas de β.

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{3} \qquad \sec\beta = \frac{5}{4} \qquad \operatorname{cotg}\beta = \frac{4}{3}$$

4. Comparación. El seno de uno es el coseno del otro, y la tangente de uno es la inversa de la del otro:

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \qquad \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Pasa siempre con los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, porque suman 90°: son **complementarios**.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En el triángulo de catetos 5 (contiguo a α) y 12, e hipotenusa 13, calcula las razones directas de β.

1. Desde β. Cateto opuesto a β: (1) . Cateto contiguo a β: (2) .

2. Razones.

$$\operatorname{sen}\beta = \text{(3)} \qquad \cos\beta = \text{(4)} \qquad \operatorname{tg}\beta = \text{(5)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En un triángulo rectángulo, $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$ y $\cos\alpha = 0{,}8$. Calcula $\operatorname{tg}\alpha$ y las razones directas del otro ángulo agudo, β.

1. Tangente de α.

(1)

2. Seno y coseno de β. *Pista: α y β son complementarios.*

(2)

3. Tangente de β.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17 cm y el cateto opuesto a α mide 8 cm. Calcula el otro cateto y las razones directas de α y de β.

Resultado para comprobar: Otro cateto: $\sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ cm. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{15}{17}$, $\cos\beta = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{15}{8}$

FICHA 22

Resolver un triángulo rectángulo: hipotenusa y un ángulo

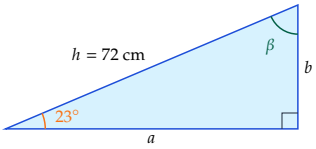
Vídeo: «Resolver triángulos rectángulos #3. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 85

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

Resuelve el triángulo rectángulo de hipotenusa 72 cm y ángulo $\alpha = 23°$.



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Seno, coseno y tangente.** Seno y coseno como cocientes de lados.
- ▹ **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar el lado que no conocemos.

Vídeo del ejercicio «Resolver triángulos rectángulos #3» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-22

Repaso: Seno, coseno y tangente

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

Qué es resolver un triángulo. Calcular sus tres lados y sus tres ángulos. Siempre sabemos uno: el ángulo recto, 90°. Tenemos tres herramientas:

1. El teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$ (relaciona los tres lados).
2. Los dos ángulos agudos suman 90°: $\alpha + \beta = 90°$.
3. Las razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.

1. El ángulo β. Pitágoras no sirve todavía (solo sabemos un lado). Pero con los ángulos sí:

$$\beta = 90° - 23° = 67°$$

2. El cateto b (opuesto a α). Buscamos una razón con un dato conocido y uno desconocido. El seno de α relaciona el opuesto (b) con la hipotenusa (72):

$$\operatorname{sen} 23° = \frac{b}{72} \Rightarrow b = 72 \cdot \operatorname{sen} 23° = 28{,}13 \text{ cm}$$

En la calculadora: `72 × sin 23 =`, con la calculadora en modo **DEG** (grados sexagesimales).

3. El cateto a (contiguo a α). Ahora podríamos usar Pitágoras, pero usamos otra razón: el coseno relaciona el contiguo (a) con la hipotenusa.

$$\cos 23° = \frac{a}{72} \Rightarrow a = 72 \cdot \cos 23° = 66{,}28 \text{ cm}$$

4. Comprobación rápida. La hipotenusa tiene que ser **mayor que cada cateto** y **menor que su suma**: $72 > 66{,}28$, $72 > 28{,}13$ y $72 < 66{,}28 + 28{,}13 = 94{,}41$. No hay nada que indique un error.

Solución. $a = 66{,}28$ cm, $b = 28{,}13$ cm, $h = 72$ cm; $\alpha = 23°$, $\beta = 67°$ y el ángulo recto.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve el triángulo rectángulo de hipotenusa 50 cm y $\alpha = 35°$.

1. Ángulo β. $\beta = 90° - 35° =$ (1)

2. Cateto opuesto a α.

$$b = 50 \cdot \operatorname{sen} 35° = \text{(2)} \text{ cm}$$

3. Cateto contiguo a α.

$$a = 50 \cdot \text{(3)} = \text{(4)} \text{ cm}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve el triángulo rectángulo de hipotenusa 20 cm y $\beta = 62°$. Llama b al cateto opuesto a α y a al contiguo.

1. Ángulo α.

(1)

2. Los dos catetos. *Pista: puedes trabajar con α (cuando ya lo tengas) o directamente con β.*

(2)

3. Comprobación.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Una escalera de 6 m está apoyada en una pared y forma un ángulo de 70° con el suelo.

a) ¿A qué altura llega la escalera?
b) ¿A qué distancia de la pared está su pie?

Resultado para comprobar: a) $6 \cdot \operatorname{sen} 70^\circ = 5{,}64$ m b) $6 \cdot \cos 70^\circ = 2{,}05$ m

FICHA 23

Resolver un triángulo rectángulo: un cateto y un ángulo

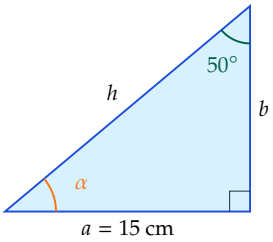
Vídeo: «Resolver triángulos rectángulos #2. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 86

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

Resuelve el triángulo rectángulo en el que el cateto a mide 15 cm y el ángulo β mide 50°.



Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Resolver triángulos rectángulos.** Repaso del método con hipotenusa y ángulo (ficha anterior).
- **Teorema de Pitágoras.** Para el último cateto: $b = \sqrt{h^2 - a^2}$.

Vídeo del ejercicio «Resolver triángulos rectángulos #2» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/funciones-23

Repaso: Resolver triángulos rectángulos

Repaso: Teorema de Pitágoras
[VÍDEO PENDIENTE]

Solución

1. El ángulo α. Los dos agudos suman 90°: $\alpha = 90° - 50° = 40°$.

2. ¿Qué razón usamos?. Faltan b y h. Con Pitágoras no podemos (una ecuación y dos incógnitas). Probamos razones de α:

- $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{h}$: hay dos datos desconocidos. No sirve.
- $\cos\alpha = \dfrac{a}{h}$: solo falta h. ¡Esta sí!

3. La hipotenusa.

$$\cos 40° = \frac{15}{h} \Rightarrow h = \frac{15}{\cos 40°} = 19{,}58 \text{ cm}$$

El h que divide pasa multiplicando y el $\cos 40°$ pasa dividiendo. $\cos 40°$ es solo un número (0,766 . . .); en la calculadora: `15 ÷ cos(40) =`.

4. Comprobación de la hipotenusa. $19{,}58 > 15$ y menor que la suma de los catetos: por ahora, bien.

5. El cateto b. Ya podríamos usar el seno, pero usamos Pitágoras despejando b:

$$h^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{19{,}58^2 - 15^2} = 12{,}58 \text{ cm}$$

Comprobación: $15 + 12{,}58 = 27{,}58 > 19{,}58$.

Solución. $a = 15$ cm, $b = 12{,}58$ cm, $h = 19{,}58$ cm; $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$ y el ángulo recto.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve el triángulo rectángulo en el que el cateto contiguo a α mide 10 cm y $\alpha = 30°$.

1. Ángulo β. $\beta =$ (1)

2. Hipotenusa con el coseno.

$$\cos 30° = \frac{10}{h} \Rightarrow h = \frac{10}{\cos 30°} = \text{(2)}\ \text{cm}$$

3. Cateto opuesto con la tangente.

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{b}{\text{(3)}} \Rightarrow b = 10 \cdot \operatorname{tg} 30° = \text{(4)}\ \text{cm}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve el triángulo rectángulo en el que el cateto opuesto a α mide 8 cm y $\alpha = 40°$.

1. Ángulo β.

(1)

2. Hipotenusa. *Pista: ¿qué razón relaciona el cateto opuesto con la hipotenusa?*

(2)

3. El otro cateto.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un árbol proyecta una sombra de 12 m cuando los rayos del sol forman un ángulo de 38° con el suelo.

a) ¿Cuál es la altura del árbol?
b) ¿Qué distancia hay desde la punta de la sombra hasta la copa del árbol?

Resultado para comprobar: a) $\operatorname{tg} 38° = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 9{,}38$ m b) $\cos 38° = \frac{12}{d} \Rightarrow d = 15{,}23$ m

Examen tipo 1

Tiempo: 90 minutos **Puntuación:** 10 puntos (4 problemas de 2,5 puntos)

Hazlo como en un examen de 4.º de ESO: sin mirar el libro ni el formulario, sin calculadora y explicando cada paso. Después corrígelo con las soluciones (solucionario, pág. 86) y anota tu nota en la hoja de seguimiento.

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Explica la diferencia entre una progresión aritmética y una geométrica. Pon un ejemplo de cada una. (1 punto)
b) En una progresión aritmética, $a_3 = 7$ y $a_8 = 22$.
   i) Halla la diferencia, el primer término y el término general. (0,75 puntos)
   ii) Calcula la suma de los 20 primeros términos. (0,75 puntos)

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Escribe la fórmula del término general de una progresión geométrica y explica qué significa cada letra. (1 punto)
b) Resuelve:
   i) En una progresión geométrica, $a_2 = 6$ y $a_5 = 162$. Halla la razón, el primer término y a_6. (0,75 puntos)
   ii) Un cultivo empieza con 500 bacterias y su número se duplica cada hora. ¿Cuántas habrá dentro de 6 horas? (0,75 puntos)

Problema 3 (2,5 puntos)

a) ¿Qué significan m y n en la ecuación $y = mx + n$? ¿Qué tienen en común dos rectas paralelas? (1 punto)
b) Resuelve:
   i) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(-1, -5)$ y $(2, 4)$. (0,75 puntos)
   ii) Halla la recta paralela a la anterior que corta al eje Y en $(0, 4)$ y su punto de corte con el eje X. (0,75 puntos)

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Define el seno, el coseno y la tangente de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. ¿Por qué el seno nunca es mayor que 1? (1 punto)
b) Resuelve (con dos decimales):
   i) Resuelve el triángulo rectángulo de hipotenusa 15 cm y $\alpha = 52°$. (0,75 puntos)
   ii) Desde un punto del suelo a 40 m del pie de una torre se ve su punta con un ángulo de 32°. ¿Cuánto mide la torre? (0,75 puntos)

Examen tipo 2

Tiempo: 90 minutos **Puntuación:** 10 puntos (4 problemas de 2,5 puntos)

Hazlo como en un examen de 4.º de ESO: sin mirar el libro ni el formulario, sin calculadora y explicando cada paso. Después corrígelo con las soluciones (solucionario, pág. 87) y anota tu nota en la hoja de seguimiento.

Problema 1 (2,5 puntos)

a) ¿Qué es el término general de una sucesión? Explícalo con la sucesión $3, 7, 11, 15, \ldots$ (1 punto)

b) Resuelve:

   i) Escribe el término general de $2, 6, 18, 54, \ldots$ y de $5, 2, -1, -4, \ldots$ (0,75 puntos)

   ii) Lucía ahorra 5 € la primera semana y cada semana 2 € más que la anterior. ¿Cuánto ahorra la semana 20? ¿Y en total en esas 20 semanas? (0,75 puntos)

Problema 2 (2,5 puntos)

a) ¿Qué son los puntos de corte de una función con los ejes? ¿Cómo se calculan a partir de su fórmula? (1 punto)

b) Para la función $f(x) = x^2 - x - 6$:

   i) Halla sus puntos de corte con los ejes y estudia su signo. (0,75 puntos)

   ii) Halla su vértice y su recorrido. (0,75 puntos)

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Explica cómo se calcula la pendiente de una recta a partir de dos de sus puntos y qué significa que sea negativa. (1 punto)
b) Resuelve:
   i) Halla la ecuación de la recta que pasa por $(2, 7)$ y $(5, 1)$. (0,75 puntos)
   ii) Un taxi cobra 3 € al subir y 1,20 € por kilómetro. Escribe la función que da el precio según los kilómetros. ¿Cuánto cuesta un viaje de 15 km? ¿Cuántos kilómetros se recorren con 33 €? (0,75 puntos)

Problema 4 (2,5 puntos)

a) ¿Por qué en un triángulo rectángulo el seno de un ángulo agudo es igual al coseno del otro? (1 punto)
b) Resuelve (con dos decimales):
   i) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 cm (el opuesto a α) y 12 cm. Halla la hipotenusa y las razones directas de α y de β. (0,75 puntos)
   ii) Una rampa forma un ángulo de $10°$ con el suelo y su base horizontal mide 8 m. ¿Qué altura sube? ¿Cuánto mide la rampa? (0,75 puntos)

Solucionario

Respuestas de todos los huecos de los ejercicios guiados, en el mismo orden que el libro. Cada ficha indica la página donde está su enunciado.

Ficha 1 · Sucesiones: términos y término general (ficha en la pág. 2)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 5
Hueco 2: 8
Hueco 3: 11
Hueco 4: 14
Hueco 5: 10
Hueco 6: 32

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_1 = 1 - 1 = 0,\ a_2 = 4 - 1 = 3,\ a_3 = 9 - 1 = 8,\ a_4 = 16 - 1 = 15$
Hueco 2: $a_{20} = 20^2 - 1 = 400 - 1 = 399$
Hueco 3: $n^2 - 1 = 99 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10$. Sí: es el término 10, $a_{10} = 99$.

Ficha 2 · Encontrar el término general de una sucesión (ficha en la pág. 5)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 25
Hueco 2: $5n$
Hueco 3: 12
Hueco 4: 2
Hueco 5: $2n + 2$

◔ Guiado 2

Hueco 1: Son los cuadrados: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$. Siguiente: 25. $a_n = n^2$
Hueco 2: Cada uno es el de a) más 1. Siguiente: 26. $a_n = n^2 + 1$
Hueco 3: a) $a_3 = 3^2 = 9$ b) $a_3 = 3^2 + 1 = 10$. Coinciden.

Ficha 3 · Progresión aritmética: el término general (ficha en la pág. 7)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 5

Hueco 2: 4

Hueco 3: $4n + 1$

Hueco 4: 201

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_1 = 20,\ d = 17 - 20 = -3$ (se resta 3 cada vez)

Hueco 2: $a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-3) = 20 - 3n + 3 = 23 - 3n$

Hueco 3: $a_{30} = 23 - 3 \cdot 30 = 23 - 90 = -67$

Ficha 4 · Progresión aritmética a partir de un término cualquiera

(ficha en la pág. 10)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 6

Hueco 2: $3n + 2$

Hueco 3: 5

Hueco 4: 122

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_n = 7 + (n - 10) \cdot (-2) = 7 - 2n + 20 = 27 - 2n$

Hueco 2: $a_1 = 27 - 2 = 25$

Hueco 3: $a_{25} = 27 - 50 = -23$

Ficha 5 · Suma de términos de una progresión aritmética (ficha en la pág. 13)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 4

Hueco 2: 79

Hueco 3: 79

Hueco 4: 10

Hueco 5: 820

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_{50} = 2 \cdot 50 = 100$

Hueco 2: $S_{50} = \dfrac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 102 \cdot 25 = 2550$

Ficha 6 · Progresión aritmética conocidos dos términos (ficha en la pág. 16)

Guiado 1

Hueco 1: -12

Hueco 2: 3

Hueco 3: 6

Hueco 4: 5

Hueco 5: 11

Guiado 2

Hueco 1: $4 = -17 + (5-12)\cdot d \Rightarrow 4 + 17 = -7d \Rightarrow 21 = -7d \Rightarrow d = -3$

Hueco 2: $4 = a_1 + (5-1)\cdot(-3) = a_1 - 12 \Rightarrow a_1 = 16$

Hueco 3: 16, 13, 10, 7, 4, ... Comprobación: $a_{12} = 16 + 11\cdot(-3) = 16 - 33 = -17$

Ficha 7 · Problemas de suma y diferencia en progresiones aritméticas (ficha en la pág. 19)

Guiado 1

Hueco 1: 31

Hueco 2: 5

Hueco 3: 175

Hueco 4: 27

Hueco 5: 3

Guiado 2

Hueco 1: $S_{20} = \dfrac{(50 + (-26))\cdot 20}{2} = 24\cdot 10 = 240$

Hueco 2: $-26 = 50 + 19d \Rightarrow -26 - 50 = 19d \Rightarrow -76 = 19d \Rightarrow d = -4$

Ficha 8 · Progresión geométrica: razón y término general (ficha en la pág. 21)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: 3

Hueco 3: 7

Hueco 4: 384

Guiado 2

Hueco 1: $r = \dfrac{27}{81} = \dfrac{1}{3}$ (se multiplica por $\frac{1}{3}$, es decir, se divide entre 3)

Hueco 2: $a_n = 81\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

Hueco 3: $a_6 = 81\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{81}{243} = \dfrac{1}{3}$

Ficha 9 · Progresión geométrica a partir de un término cualquiera (ficha en la pág. 24)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: 4

Hueco 3: 3

Hueco 4: 96

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

Hueco 2: $a_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2 \cdot 2^3 = 16 \implies a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Hueco 3: $a_7 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Ficha 10 · Puntos en el plano cartesiano (ficha en la pág. 28)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: -4

Hueco 3: -2

Hueco 4: -3

Hueco 5: -1

Hueco 6: II

Hueco 7: III

Hueco 8: Y

◔ Guiado 2

Hueco 1: E: 3 a la derecha y 2 abajo. F: 4 a la izquierda y 1 abajo. G: no se mueve en horizontal, 3 arriba. H: 2 a la izquierda, sin subir ni bajar.

Hueco 2: E: cuadrante IV. F: cuadrante III. G: sobre el eje Y. H: sobre el eje X.

Ficha 11 · Qué es una función: fórmula, tabla y gráfica (ficha en la pág. 32)

◑ Guiado 1

Hueco 1: -4

Hueco 2: -1

Hueco 3: 2

Hueco 4: 5

Hueco 5: 8

Hueco 6: $(3, 8)$ sí

Guiado 2

Hueco 1: $f(-2) = 4 - 2 = 2$, $f(-1) = 1 - 2 = -1$, $f(0) = -2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2$

Hueco 2: $f(-3) = (-3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

Hueco 3: No: los puntos $(-2, 2)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$ no están alineados. Bajan y vuelven a subir: es una curva (una parábola).

Ficha 12 · Dominio y recorrido a partir de la gráfica (ficha en la pág. 35)

Guiado 1

Hueco 1: -4

Hueco 2: 5

Hueco 3: $[-4, 5)$

Hueco 4: -1

Hueco 5: 5

Hueco 6: $[-1, 5]$

Guiado 2

Hueco 1: De $x = -5$ (hueco) a $x = 6$ (relleno): $\text{Dom } f = (-5, 6]$

Hueco 2: Lo más bajo, $y = -3$; lo más alto, $y = 4$ (punto relleno). El punto hueco está a altura 3, pero esa altura se alcanza en otros puntos. $\text{Rec } f = [-3, 4]$

Ficha 13 · Puntos de corte con los ejes y signo de una función (ficha en la pág. 38)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: -4

Hueco 3: -1

Hueco 4: 5

Guiado 2

Hueco 1: Eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$. Eje Y: $(0, 2)$.

Hueco 2: $(-1, 4)$

Hueco 3: $[-3, -1) \cup (4, 6]$

Ficha 14 · Funciones lineales: la pendiente (ficha en la pág. 42)

Guiado 1

Hueco 1: 8

Hueco 2: -1

Hueco 3: 4

Hueco 4: sube

Hueco 5: $-\frac{1}{2}$

Hueco 6: baja

Guiado 2

Hueco 1: $y = \frac{x}{3}$: $(0, 0)$ y $(3, 1)$. $y = -2x$: $(0, 0)$ y $(1, -2)$.

Hueco 2: $y = \frac{x}{3}$: $m = \frac{1}{3}$, creciente (sube). $y = -2x$: $m = -2$, decreciente (baja).

Hueco 3: $y = -2x$: su pendiente, sin contar el signo, es 2, mayor que $\frac{1}{3}$. La otra es casi horizontal.

Ficha 15 · Funciones afines y constantes: la ordenada en el origen (ficha en la pág. 45)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: -1

Hueco 3: -1

Hueco 4: 3

Guiado 2

Hueco 1: $y = -x + 4$: $m = -1$, $n = 4$. $y = -x - 2$: $m = -1$, $n = -2$. $y = -2$: $m = 0$, $n = -2$.

Hueco 2: $y = -x + 4$ e $y = -x - 2$, porque tienen la misma pendiente (-1).

Hueco 3: Una recta horizontal a la altura -2 (paralela al eje X). Corta al eje Y en el mismo punto que $y = -x - 2$: $(0, -2)$.

Ficha 16 · Ecuación de la recta que pasa por dos puntos (ficha en la pág. 48)

Guiado 1

Hueco 1: 4

Hueco 2: $2y - 6$

Hueco 3: 2

Hueco 4: $2x + 1$

Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{x+1}{2+1} = \dfrac{y-4}{-2-4} \Rightarrow \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-6}$

Hueco 2: $-6(x + 1) = 3(y - 4) \Rightarrow -6x - 6 = 3y - 12$

Hueco 3: $3y = -6x + 6 \Rightarrow y = -2x + 2$. Con B: $-2 \cdot 2 + 2 = -2$. Correcto.

Ficha 17 · Ecuación de la recta: pendiente y ordenada en el origen (ficha en la pág. 51)

Guiado 1

Hueco 1: 6

Hueco 2: 3

Hueco 3: -5

Hueco 4: $3x - 5$

Guiado 2

Hueco 1: $m = \dfrac{2-5}{4-(-2)} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

Hueco 2: $5 = -\dfrac{1}{2}\cdot(-2) + n = 1 + n \Rightarrow n = 4$

Hueco 3: $y = -\dfrac{x}{2} + 4$. Con B: $-\dfrac{4}{2} + 4 = 2$. Correcto.

Ficha 18 · Parábolas: hacia dónde miran y cuántas veces cortan

(ficha en la pág. 54)

Guiado 1

Hueco 1: arriba

Hueco 2: ± 2

Hueco 3: 2

Hueco 4: abajo

Hueco 5: 1

Hueco 6: un

Guiado 2

Hueco 1: $a = 2 > 0$: mira hacia arriba. $2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{2}$: imposible, un cuadrado no es negativo. No corta al eje X.

Hueco 2: $a = -1 < 0$: mira hacia abajo. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \dfrac{-1 \pm 5}{-2}$: $x = -2$ y $x = 3$. Corta dos veces.

Ficha 19 · Representar una parábola: cortes, vértice y tabla

(ficha en la pág. 57)

Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: -1

Hueco 3: -3

Hueco 4: -4

Hueco 5: 5

Hueco 6: 5

Guiado 2

Hueco 1: $a = -1$: mira hacia abajo. Eje X: $-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x+4) = 0$: $(0,0)$ y $(4,0)$. Eje Y: $(0,0)$.

Hueco 2: $x_V = \dfrac{-4}{-2} = 2$, $y_V = -4 + 8 = 4$: $V(2,4)$

Hueco 3: $f(1) = 3$, $f(3) = 3$, $f(-1) = -5$, $f(5) = -5$. Parábola hacia abajo con vértice $(2,4)$ que corta al eje X en 0 y en 4.

Ficha 20 · Seno, coseno y tangente: razones directas e inversas

(ficha en la pág. 62)

Guiado 1

Hueco 1: 13

Hueco 2: 5

Hueco 3: $\frac{12}{5}$

Hueco 4: $\frac{13}{12}$

Hueco 5: $\frac{13}{5}$

Hueco 6: $\frac{5}{12}$

Guiado 2

Hueco 1: $h = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ cm

Hueco 2: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Hueco 3: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$, $\sec\alpha = \frac{5}{4}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$

Ficha 21 · Los dos ángulos agudos: ángulos complementarios

(ficha en la pág. 65)

Guiado 1

Hueco 1: 5

Hueco 2: 12

Hueco 3: $\frac{5}{13}$

Hueco 4: $\frac{12}{13}$

Hueco 5: $\frac{5}{12}$

Guiado 2

Hueco 1: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

Hueco 2: $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = 0{,}8$, $\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$

Hueco 3: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$ (la inversa de 0,75)

Ficha 22 · Resolver un triángulo rectángulo: hipotenusa y un ángulo

(ficha en la pág. 68)

Guiado 1

Hueco 1: 55°

Hueco 2: 28,68

Hueco 3: $\cos 35°$

Hueco 4: 40,96

Guiado 2

Hueco 1: $\alpha = 90° - 62° = 28°$

Hueco 2: $b = 20 \cdot \operatorname{sen} 28° = 9{,}39$ cm; $a = 20 \cdot \cos 28° = 17{,}66$ cm (con β: $a = 20 \operatorname{sen} 62°$, $b = 20 \cos 62°$; sale lo mismo)

Hueco 3: $20 > 17{,}66$, $20 > 9{,}39$ y $20 < 17{,}66 + 9{,}39 = 27{,}05$. Correcto.

Ficha 23 · Resolver un triángulo rectángulo: un cateto y un ángulo (ficha en la pág. 71)

Guiado 1

Hueco 1: 60°

Hueco 2: 11,55

Hueco 3: 10

Hueco 4: 5,77

Guiado 2

Hueco 1: $\beta = 90° - 40° = 50°$

Hueco 2: El seno: $\operatorname{sen} 40° = \dfrac{8}{h} \Rightarrow h = \dfrac{8}{\operatorname{sen} 40°} = 12{,}45$ cm

Hueco 3: $\operatorname{tg} 40° = \dfrac{8}{a} \Rightarrow a = \dfrac{8}{\operatorname{tg} 40°} = 9{,}53$ cm (con Pitágoras sale 9,54 por el redondeo de h)

Examen tipo 1 · Soluciones (examen en la pág. 74)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) En una progresión aritmética cada término se obtiene *sumando* al anterior un número fijo, la diferencia d: por ejemplo $2, 5, 8, 11, \ldots$ ($d = 3$). En una geométrica cada término se obtiene *multiplicando* el anterior por un número fijo, la razón r: por ejemplo $2, 6, 18, 54, \ldots$ ($r = 3$).

b) i) $a_n = a_k + (n-k)\,d$ con a_3 y a_8: $7 = 22 + (3-8)\,d \Rightarrow -15 = -5d \Rightarrow d = 3$. $7 = a_1 + 2 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 1$. $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$.

b) ii) $a_{20} = 3 \cdot 20 - 2 = 58$. $S_{20} = \dfrac{(1+58) \cdot 20}{2} = 59 \cdot 10 = 590$.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$: a_n es el término que queremos, a_1 el primer término, r la razón (el número por el que se multiplica) y n el lugar que ocupa el término.

b) i) $a_5 = a_2 \cdot r^{5-2} \Rightarrow 162 = 6\,r^3 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$. $a_1 = \dfrac{6}{3} = 2$. $a_6 = 162 \cdot 3 = 486$.

b) ii) Es una progresión geométrica de razón 2: al principio hay 500 y cada hora se multiplica por 2. Dentro de 6 horas se ha multiplicado 6 veces: $500 \cdot 2^6 = 500 \cdot 64 = 32\,000$ bacterias.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) m es la pendiente: indica lo inclinada que está la recta y si sube ($m > 0$) o baja ($m < 0$). n es la ordenada en el origen: la recta corta al eje Y en $(0, n)$. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente (y distinta n).

b) i) $m = \dfrac{4-(-5)}{2-(-1)} = \dfrac{9}{3} = 3$. Con $(2, 4)$: $4 = 3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -2$. $y = 3x - 2$. Comprobación con $(-1, -5)$: $-3 - 2 = -5$ ✓.

b) ii) Paralela: $m = 3$; corta al eje Y en 4: $y = 3x + 4$. Eje X: $3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$: $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

Problema 4 (2,5 puntos)

a)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

La hipotenusa es siempre el lado mayor, así que el cociente entre un cateto y la hipotenusa es menor que 1.

b) i) $\beta = 90° - 52° = 38°$. Opuesto a α: $15 \cdot \operatorname{sen} 52° = 11{,}82$ cm. Contiguo: $15 \cdot \cos 52° = 9{,}23$ cm. ($15 > 11{,}82$ y $15 > 9{,}23$; $15 < 21{,}05$ ✓)

b) ii) La altura es el cateto opuesto al ángulo de 32° y los 40 m el contiguo: $\operatorname{tg} 32° = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 40 \cdot \operatorname{tg} 32° = 24{,}99$ m (unos 25 m).

Examen tipo 2 · Soluciones (examen en la pág. 76)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Es una fórmula, a_n, que da cualquier término de la sucesión cambiando la n por el lugar que ocupa, sin calcular los anteriores. En $3, 7, 11, 15, \ldots$ se suma 4 cada vez: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$. Comprobación: $a_1 = 3$, $a_4 = 15$ ✓; y, por ejemplo, $a_{100} = 399$.

b) i) $2, 6, 18, 54, \ldots$ es geométrica de razón 3: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. $5, 2, -1, -4, \ldots$ es aritmética de diferencia -3: $a_n = 5 + (n-1) \cdot (-3) = 8 - 3n$.

b) ii) Progresión aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 2$: $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$ €. Total: $S_{20} = \frac{(5 + 43) \cdot 20}{2} = 480$ €.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Son los puntos donde la gráfica cruza los ejes. Con el eje X la y vale 0: se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. Con el eje Y la x vale 0: se calcula $f(0)$ (hay como mucho uno).

b) i) $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$: $(3, 0)$ y $(-2, 0)$. $f(0) = -6$: $(0, -6)$. Es una parábola hacia arriba ($a = 1 > 0$): positiva en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(-2, 3)$.

b) ii) $x_V = \frac{1}{2}$, $y_V = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$: $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. Como mira hacia arriba, el vértice es el punto más bajo: $\operatorname{Rec} f = \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right)$.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$: lo que sube (o baja) la y dividido entre lo que avanza la x. Si es negativa, al avanzar hacia la derecha la y baja: la recta va cuesta abajo (función decreciente).

b) i) $m = \dfrac{1-7}{5-2} = \dfrac{-6}{3} = -2$. $7 = -2 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 11$: $y = -2x + 11$. Con $(5, 1)$: $-10 + 11 = 1$ ✓.

b) ii) $P(x) = 1{,}20\,x + 3$ (x en km, P en €). $P(15) = 18 + 3 = 21$ €. $1{,}20\,x + 3 = 33 \Rightarrow 1{,}20\,x = 30 \Rightarrow x = 25$ km.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Los dos ángulos agudos suman 90°. El cateto opuesto a uno es el contiguo al otro, así que $\dfrac{\text{opuesto a } \alpha}{h}$ (el seno de α) es el mismo cociente que $\dfrac{\text{contiguo a } \beta}{h}$ (el coseno de β).

b) i) $h = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ cm. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{4}{3}$.

b) ii) Altura (cateto opuesto): $\operatorname{tg} 10° = \dfrac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \cdot \operatorname{tg} 10° = 1{,}41$ m. Rampa (hipotenusa): $\cos 10° = \dfrac{8}{L} \Rightarrow L = \dfrac{8}{\cos 10°} = 8{,}12$ m.

Resumen de reglas

Sucesiones	a_n: término que ocupa el lugar n. Término general: fórmula que da cualquier término cambiando la n. Pares: $2n$; impares: $2n-1$ o $2n+1$; cuadrados: n^2.
Progresión aritmética	Se suma la diferencia d. $a_n = a_1 + (n-1)\,d$; $a_n = a_k + (n-k)\,d$. Suma de n términos: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$.
Progresión geométrica	Se multiplica por la razón r. $a_n = a_1 \cdot r^{\,n-1}$; $a_n = a_k \cdot r^{\,n-k}$. Suma de n términos: $S_n = \dfrac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$.
Plano cartesiano	$P(x, y)$: primero la x (horizontal) y después la y (vertical). Cuadrantes I, II, III y IV en sentido contrario a las agujas del reloj.
Funciones	Dominio: valores de x (eje X). Recorrido: valores de y (eje Y). Punto relleno: entra [ ]; hueco: no entra ( ). Corte con el eje X: $f(x) = 0$; con el eje Y: $f(0)$. Positiva: por encima del eje X.
Rectas	Lineal $y = mx$ (pasa por el origen); afín $y = mx + n$; constante $y = n$ (horizontal). m: pendiente ($m > 0$ sube, $m < 0$ baja); n: corte con el eje Y. Paralelas: misma m.
Recta por dos puntos	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, o bien $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y después n sustituyendo un punto en $y = mx + n$.
Parábola	$y = ax^2 + bx + c$. $a > 0$: mira arriba; $a < 0$: abajo. Cortes con el eje X: $ax^2 + bx + c = 0$ (0, 1 o 2). Vértice: $x_V = \dfrac{-b}{2a}$, $y_V = f(x_V)$. Puntos simétricos respecto al vértice.
Razones trigonométricas	$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{opuesto}}{h}$, $\cos\alpha = \dfrac{\text{contiguo}}{h}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{opuesto}}{\text{contiguo}} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. $\operatorname{cosec} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}}$, $\sec = \dfrac{1}{\cos}$, $\operatorname{cotg} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}}$. Complementarios: $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$.
Triángulos rectángulos	Pitágoras: $h^2 = a^2 + b^2$. $\alpha + \beta = 90°$. Elegir la razón con un dato conocido y uno desconocido. Comprobar: h mayor que cada cateto y menor que su suma. Calculadora en DEG.

Hoja de seguimiento

Marca cada ejercicio cuando te salga sin mirar el solucionario.

Ficha	Tema	Guiado 1	Guiado 2	Examen	Repasar
1	Sucesiones: términos y término general	☐	☐	☐	☐
2	Encontrar el término general de una sucesión	☐	☐	☐	☐
3	Progresión aritmética: el término general	☐	☐	☐	☐
4	Progresión aritmética a partir de un término cualquiera	☐	☐	☐	☐
5	Suma de términos de una progresión aritmética	☐	☐	☐	☐
6	Progresión aritmética conocidos dos términos	☐	☐	☐	☐
7	Problemas de suma y diferencia en progresiones aritméticas	☐	☐	☐	☐
8	Progresión geométrica: razón y término general	☐	☐	☐	☐
9	Progresión geométrica a partir de un término cualquiera	☐	☐	☐	☐
10	Puntos en el plano cartesiano	☐	☐	☐	☐
11	Qué es una función: fórmula, tabla y gráfica	☐	☐	☐	☐
12	Dominio y recorrido a partir de la gráfica	☐	☐	☐	☐
13	Puntos de corte con los ejes y signo de una función	☐	☐	☐	☐
14	Funciones lineales: la pendiente	☐	☐	☐	☐
15	Funciones afines y constantes: la ordenada en el origen	☐	☐	☐	☐
16	Ecuación de la recta que pasa por dos puntos	☐	☐	☐	☐
17	Ecuación de la recta: pendiente y ordenada en el origen	☐	☐	☐	☐
18	Parábolas: hacia dónde miran y cuántas veces cortan	☐	☐	☐	☐
19	Representar una parábola: cortes, vértice y tabla	☐	☐	☐	☐
20	Seno, coseno y tangente: razones directas e inversas	☐	☐	☐	☐
21	Los dos ángulos agudos: ángulos complementarios	☐	☐	☐	☐
22	Resolver un triángulo rectángulo: hipotenusa y un ángulo	☐	☐	☐	☐
23	Resolver un triángulo rectángulo: un cateto y un ángulo	☐	☐	☐	☐
Examen tipo 1	nota: _____			☐	☐
Examen tipo 2	nota: _____			☐	☐

Recursos complementarios



Lista de reproducción «Matemáticas secundaria»: los vídeos de este cuaderno

https://todosobresaliente.com/v/funciones-lista



Web de TodoSobresaliente: www.TodoSobresaliente.com

https://www.todosobresaliente.com