Sucesiones, funciones y trigonometría

Solucionario

Respuestas de los huecos de los ejercicios guiados

TodoSobresaliente

Solucionario

Respuestas de todos los huecos de los ejercicios guiados, en el mismo orden que el libro. Cada ficha indica la página donde está su enunciado.

Ficha 1 · Sucesiones: términos y término general (ficha en la pág. 2)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 5
Hueco 2: 8
Hueco 3: 11
Hueco 4: 14
Hueco 5: 10
Hueco 6: 32

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_1 = 1 - 1 = 0,\ a_2 = 4 - 1 = 3,\ a_3 = 9 - 1 = 8,\ a_4 = 16 - 1 = 15$
Hueco 2: $a_{20} = 20^2 - 1 = 400 - 1 = 399$
Hueco 3: $n^2 - 1 = 99 \Rightarrow n^2 = 100 \Rightarrow n = 10$. Sí: es el término 10, $a_{10} = 99$.

Ficha 2 · Encontrar el término general de una sucesión (ficha en la pág. 5)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 25
Hueco 2: $5n$
Hueco 3: 12
Hueco 4: 2
Hueco 5: $2n + 2$

◔ Guiado 2

Hueco 1: Son los cuadrados: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$. Siguiente: 25. $a_n = n^2$
Hueco 2: Cada uno es el de a) más 1. Siguiente: 26. $a_n = n^2 + 1$
Hueco 3: a) $a_3 = 3^2 = 9$ b) $a_3 = 3^2 + 1 = 10$. Coinciden.

Ficha 3 · Progresión aritmética: el término general (ficha en la pág. 7)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 5

Hueco 2: 4

Hueco 3: $4n + 1$

Hueco 4: 201

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_1 = 20,\ d = 17 - 20 = -3$ (se resta 3 cada vez)

Hueco 2: $a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-3) = 20 - 3n + 3 = 23 - 3n$

Hueco 3: $a_{30} = 23 - 3 \cdot 30 = 23 - 90 = -67$

Ficha 4 · Progresión aritmética a partir de un término cualquiera

(ficha en la pág. 10)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 6

Hueco 2: $3n + 2$

Hueco 3: 5

Hueco 4: 122

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_n = 7 + (n - 10) \cdot (-2) = 7 - 2n + 20 = 27 - 2n$

Hueco 2: $a_1 = 27 - 2 = 25$

Hueco 3: $a_{25} = 27 - 50 = -23$

Ficha 5 · Suma de términos de una progresión aritmética (ficha en la pág. 13)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 4

Hueco 2: 79

Hueco 3: 79

Hueco 4: 10

Hueco 5: 820

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_{50} = 2 \cdot 50 = 100$

Hueco 2: $S_{50} = \dfrac{(2 + 100) \cdot 50}{2} = 102 \cdot 25 = 2550$

Ficha 6 · Progresión aritmética conocidos dos términos (ficha en la pág. 16)

Guiado 1

Hueco 1: -12

Hueco 2: 3

Hueco 3: 6

Hueco 4: 5

Hueco 5: 11

Guiado 2

Hueco 1: $4 = -17 + (5-12)\cdot d \Rightarrow 4 + 17 = -7d \Rightarrow 21 = -7d \Rightarrow d = -3$

Hueco 2: $4 = a_1 + (5-1)\cdot(-3) = a_1 - 12 \Rightarrow a_1 = 16$

Hueco 3: 16, 13, 10, 7, 4, ... Comprobación: $a_{12} = 16 + 11\cdot(-3) = 16 - 33 = -17$

Ficha 7 · Problemas de suma y diferencia en progresiones aritméticas (ficha en la pág. 19)

Guiado 1

Hueco 1: 31

Hueco 2: 5

Hueco 3: 175

Hueco 4: 27

Hueco 5: 3

Guiado 2

Hueco 1: $S_{20} = \dfrac{(50 + (-26))\cdot 20}{2} = 24\cdot 10 = 240$

Hueco 2: $-26 = 50 + 19d \Rightarrow -26 - 50 = 19d \Rightarrow -76 = 19d \Rightarrow d = -4$

Ficha 8 · Progresión geométrica: razón y término general (ficha en la pág. 21)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: 3

Hueco 3: 7

Hueco 4: 384

Guiado 2

Hueco 1: $r = \dfrac{27}{81} = \dfrac{1}{3}$ (se multiplica por $\frac{1}{3}$, es decir, se divide entre 3)

Hueco 2: $a_n = 81\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

Hueco 3: $a_6 = 81\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{81}{243} = \dfrac{1}{3}$

Ficha 9 · Progresión geométrica a partir de un término cualquiera (ficha en la pág. 24)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: 4

Hueco 3: 3

Hueco 4: 96

◔ Guiado 2

Hueco 1: $a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$

Hueco 2: $a_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2 \cdot 2^3 = 16 \implies a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Hueco 3: $a_7 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Ficha 10 · Puntos en el plano cartesiano (ficha en la pág. 28)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: -4

Hueco 3: -2

Hueco 4: -3

Hueco 5: -1

Hueco 6: II

Hueco 7: III

Hueco 8: Y

◔ Guiado 2

Hueco 1: E: 3 a la derecha y 2 abajo. F: 4 a la izquierda y 1 abajo. G: no se mueve en horizontal, 3 arriba. H: 2 a la izquierda, sin subir ni bajar.

Hueco 2: E: cuadrante IV. F: cuadrante III. G: sobre el eje Y. H: sobre el eje X.

Ficha 11 · Qué es una función: fórmula, tabla y gráfica (ficha en la pág. 32)

◑ Guiado 1

Hueco 1: -4

Hueco 2: -1

Hueco 3: 2

Hueco 4: 5

Hueco 5: 8

Hueco 6: $(3, 8)$ sí

Guiado 2

Hueco 1: $f(-2) = 4 - 2 = 2$, $f(-1) = 1 - 2 = -1$, $f(0) = -2$, $f(1) = -1$, $f(2) = 2$

Hueco 2: $f(-3) = (-3)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

Hueco 3: No: los puntos $(-2, 2)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(2, 2)$ no están alineados. Bajan y vuelven a subir: es una curva (una parábola).

Ficha 12 · Dominio y recorrido a partir de la gráfica (ficha en la pág. 35)

Guiado 1

Hueco 1: -4

Hueco 2: 5

Hueco 3: $[-4, 5)$

Hueco 4: -1

Hueco 5: 5

Hueco 6: $[-1, 5]$

Guiado 2

Hueco 1: De $x = -5$ (hueco) a $x = 6$ (relleno): $\text{Dom } f = (-5, 6]$

Hueco 2: Lo más bajo, $y = -3$; lo más alto, $y = 4$ (punto relleno). El punto hueco está a altura 3, pero esa altura se alcanza en otros puntos. $\text{Rec } f = [-3, 4]$

Ficha 13 · Puntos de corte con los ejes y signo de una función (ficha en la pág. 38)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: -4

Hueco 3: -1

Hueco 4: 5

Guiado 2

Hueco 1: Eje X: $(-1, 0)$ y $(4, 0)$. Eje Y: $(0, 2)$.

Hueco 2: $(-1, 4)$

Hueco 3: $[-3, -1) \cup (4, 6]$

Ficha 14 · Funciones lineales: la pendiente (ficha en la pág. 42)

Guiado 1

Hueco 1: 8

Hueco 2: -1

Hueco 3: 4

Hueco 4: sube

Hueco 5: $-\frac{1}{2}$

Hueco 6: baja

Guiado 2

Hueco 1: $y = \frac{x}{3}$: $(0, 0)$ y $(3, 1)$. $y = -2x$: $(0, 0)$ y $(1, -2)$.

Hueco 2: $y = \frac{x}{3}$: $m = \frac{1}{3}$, creciente (sube). $y = -2x$: $m = -2$, decreciente (baja).

Hueco 3: $y = -2x$: su pendiente, sin contar el signo, es 2, mayor que $\frac{1}{3}$. La otra es casi horizontal.

Ficha 15 · Funciones afines y constantes: la ordenada en el origen (ficha en la pág. 45)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: -1

Hueco 3: -1

Hueco 4: 3

Guiado 2

Hueco 1: $y = -x + 4$: $m = -1, n = 4$. $y = -x - 2$: $m = -1, n = -2$. $y = -2$: $m = 0, n = -2$.

Hueco 2: $y = -x + 4$ e $y = -x - 2$, porque tienen la misma pendiente (-1).

Hueco 3: Una recta horizontal a la altura -2 (paralela al eje X). Corta al eje Y en el mismo punto que $y = -x - 2$: $(0, -2)$.

Ficha 16 · Ecuación de la recta que pasa por dos puntos (ficha en la pág. 48)

Guiado 1

Hueco 1: 4

Hueco 2: $2y - 6$

Hueco 3: 2

Hueco 4: $2x + 1$

Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{x+1}{2+1} = \dfrac{y-4}{-2-4} \Rightarrow \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-4}{-6}$

Hueco 2: $-6(x + 1) = 3(y - 4) \Rightarrow -6x - 6 = 3y - 12$

Hueco 3: $3y = -6x + 6 \Rightarrow y = -2x + 2$. Con B: $-2 \cdot 2 + 2 = -2$. Correcto.

Ficha 17 · Ecuación de la recta: pendiente y ordenada en el origen (ficha en la pág. 51)

Guiado 1

Hueco 1: 6

Hueco 2: 3

Hueco 3: -5

Hueco 4: $3x - 5$

Guiado 2

Hueco 1: $m = \dfrac{2-5}{4-(-2)} = \dfrac{-3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

Hueco 2: $5 = -\dfrac{1}{2}\cdot(-2) + n = 1 + n \Rightarrow n = 4$

Hueco 3: $y = -\dfrac{x}{2} + 4$. Con B: $-\dfrac{4}{2} + 4 = 2$. Correcto.

Ficha 18 · Parábolas: hacia dónde miran y cuántas veces cortan

(ficha en la pág. 54)

Guiado 1

Hueco 1: arriba

Hueco 2: ± 2

Hueco 3: 2

Hueco 4: abajo

Hueco 5: 1

Hueco 6: un

Guiado 2

Hueco 1: $a = 2 > 0$: mira hacia arriba. $2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{2}$: imposible, un cuadrado no es negativo. No corta al eje X.

Hueco 2: $a = -1 < 0$: mira hacia abajo. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} = \dfrac{-1 \pm 5}{-2}$: $x = -2$ y $x = 3$. Corta dos veces.

Ficha 19 · Representar una parábola: cortes, vértice y tabla

(ficha en la pág. 57)

Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: -1

Hueco 3: -3

Hueco 4: -4

Hueco 5: 5

Hueco 6: 5

Guiado 2

Hueco 1: $a = -1$: mira hacia abajo. Eje X: $-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x+4) = 0$: $(0,0)$ y $(4,0)$. Eje Y: $(0,0)$.

Hueco 2: $x_V = \dfrac{-4}{-2} = 2$, $y_V = -4 + 8 = 4$: $V(2,4)$

Hueco 3: $f(1) = 3$, $f(3) = 3$, $f(-1) = -5$, $f(5) = -5$. Parábola hacia abajo con vértice $(2,4)$ que corta al eje X en 0 y en 4.

Ficha 20 · Seno, coseno y tangente: razones directas e inversas

(ficha en la pág. 62)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 13

Hueco 2: 5

Hueco 3: $\frac{12}{5}$

Hueco 4: $\frac{13}{12}$

Hueco 5: $\frac{13}{5}$

Hueco 6: $\frac{5}{12}$

◔ Guiado 2

Hueco 1: $h = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$ cm

Hueco 2: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Hueco 3: $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3},\ \sec\alpha = \frac{5}{4},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$

Ficha 21 · Los dos ángulos agudos: ángulos complementarios

(ficha en la pág. 65)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 5

Hueco 2: 12

Hueco 3: $\frac{5}{13}$

Hueco 4: $\frac{12}{13}$

Hueco 5: $\frac{5}{12}$

◔ Guiado 2

Hueco 1: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

Hueco 2: $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha = 0{,}8,\ \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$

Hueco 3: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3} \approx 1{,}33$ (la inversa de 0,75)

Ficha 22 · Resolver un triángulo rectángulo: hipotenusa y un ángulo

(ficha en la pág. 68)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 55°

Hueco 2: 28,68

Hueco 3: $\cos 35°$

Hueco 4: 40,96

◔ Guiado 2

Hueco 1: $\alpha = 90° - 62° = 28°$

Hueco 2: $b = 20 \cdot \operatorname{sen} 28° = 9{,}39$ cm; $a = 20 \cdot \cos 28° = 17{,}66$ cm (con β: $a = 20 \operatorname{sen} 62°$, $b = 20 \cos 62°$; sale lo mismo)

Hueco 3: $20 > 17{,}66$, $20 > 9{,}39$ y $20 < 17{,}66 + 9{,}39 = 27{,}05$. Correcto.

Ficha 23 · Resolver un triángulo rectángulo: un cateto y un ángulo (ficha en la pág. 71)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 60°

Hueco 2: 11,55

Hueco 3: 10

Hueco 4: 5,77

◔ Guiado 2

Hueco 1: $\beta = 90° - 40° = 50°$

Hueco 2: El seno: $\operatorname{sen} 40° = \dfrac{8}{h} \Rightarrow h = \dfrac{8}{\operatorname{sen} 40°} = 12{,}45$ cm

Hueco 3: $\operatorname{tg} 40° = \dfrac{8}{a} \Rightarrow a = \dfrac{8}{\operatorname{tg} 40°} = 9{,}53$ cm (con Pitágoras sale 9,54 por el redondeo de h)

Examen tipo 1 · Soluciones (examen en la pág. 74)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) En una progresión aritmética cada término se obtiene *sumando* al anterior un número fijo, la diferencia d: por ejemplo $2, 5, 8, 11, \ldots$ ($d = 3$). En una geométrica cada término se obtiene *multiplicando* el anterior por un número fijo, la razón r: por ejemplo $2, 6, 18, 54, \ldots$ ($r = 3$).

b) i) $a_n = a_k + (n-k)\,d$ con a_3 y a_8: $7 = 22 + (3-8)\,d \Rightarrow -15 = -5d \Rightarrow d = 3$. $7 = a_1 + 2 \cdot 3 \Rightarrow a_1 = 1$. $a_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$.

b) ii) $a_{20} = 3 \cdot 20 - 2 = 58$. $S_{20} = \dfrac{(1 + 58) \cdot 20}{2} = 59 \cdot 10 = 590$.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$: a_n es el término que queremos, a_1 el primer término, r la razón (el número por el que se multiplica) y n el lugar que ocupa el término.

b) i) $a_5 = a_2 \cdot r^{5-2} \Rightarrow 162 = 6\,r^3 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$. $a_1 = \dfrac{6}{3} = 2$. $a_6 = 162 \cdot 3 = 486$.

b) ii) Es una progresión geométrica de razón 2: al principio hay 500 y cada hora se multiplica por 2. Dentro de 6 horas se ha multiplicado 6 veces: $500 \cdot 2^6 = 500 \cdot 64 = 32\,000$ bacterias.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) m es la pendiente: indica lo inclinada que está la recta y si sube ($m > 0$) o baja ($m < 0$). n es la ordenada en el origen: la recta corta al eje Y en $(0, n)$. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente (y distinta n).

b) i) $m = \dfrac{4 - (-5)}{2 - (-1)} = \dfrac{9}{3} = 3$. Con $(2, 4)$: $4 = 3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -2$. $y = 3x - 2$. Comprobación con $(-1, -5)$: $-3 - 2 = -5$ ✓.

b) ii) Paralela: $m = 3$; corta al eje Y en 4: $y = 3x + 4$. Eje X: $3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$: $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

Problema 4 (2,5 puntos)

a)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

La hipotenusa es siempre el lado mayor, así que el cociente entre un cateto y la hipotenusa es menor que 1.

b) i) $\beta = 90° - 52° = 38°$. Opuesto a α: $15 \cdot \operatorname{sen} 52° = 11{,}82$ cm. Contiguo: $15 \cdot \cos 52° = 9{,}23$ cm. ($15 > 11{,}82$ y $15 > 9{,}23$; $15 < 21{,}05$ ✓)

b) ii) La altura es el cateto opuesto al ángulo de 32° y los 40 m el contiguo: $\operatorname{tg} 32° = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 40 \cdot \operatorname{tg} 32° = 24{,}99$ m (unos 25 m).

Examen tipo 2 · Soluciones (examen en la pág. 76)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Es una fórmula, a_n, que da cualquier término de la sucesión cambiando la n por el lugar que ocupa, sin calcular los anteriores. En $3, 7, 11, 15, \ldots$ se suma 4 cada vez: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$. Comprobación: $a_1 = 3$, $a_4 = 15$ ✓; y, por ejemplo, $a_{100} = 399$.

b) i) $2, 6, 18, 54, \ldots$ es geométrica de razón 3: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$. $5, 2, -1, -4, \ldots$ es aritmética de diferencia -3: $a_n = 5 + (n-1) \cdot (-3) = 8 - 3n$.

b) ii) Progresión aritmética con $a_1 = 5$ y $d = 2$: $a_{20} = 5 + 19 \cdot 2 = 43$ €. Total: $S_{20} = \frac{(5 + 43) \cdot 20}{2} = 480$ €.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Son los puntos donde la gráfica cruza los ejes. Con el eje X la y vale 0: se resuelve la ecuación $f(x) = 0$. Con el eje Y la x vale 0: se calcula $f(0)$ (hay como mucho uno).

b) i) $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2}$: $(3, 0)$ y $(-2, 0)$. $f(0) = -6$: $(0, -6)$. Es una parábola hacia arriba ($a = 1 > 0$): positiva en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(-2, 3)$.

b) ii) $x_V = \frac{1}{2}$, $y_V = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -\frac{25}{4}$: $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. Como mira hacia arriba, el vértice es el punto más bajo: $\operatorname{Rec} f = \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right)$.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$: lo que sube (o baja) la y dividido entre lo que avanza la x. Si es negativa, al avanzar hacia la derecha la y baja: la recta va cuesta abajo (función decreciente).

b) i) $m = \dfrac{1-7}{5-2} = \dfrac{-6}{3} = -2$. $7 = -2 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 11$: $y = -2x + 11$. Con $(5, 1)$: $-10 + 11 = 1$ ✓.

b) ii) $P(x) = 1{,}20\,x + 3$ (x en km, P en €). $P(15) = 18 + 3 = 21$ €. $1{,}20\,x + 3 = 33 \Rightarrow 1{,}20\,x = 30 \Rightarrow x = 25$ km.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Los dos ángulos agudos suman 90°. El cateto opuesto a uno es el contiguo al otro, así que $\dfrac{\text{opuesto a } \alpha}{h}$ (el seno de α) es el mismo cociente que $\dfrac{\text{contiguo a } \beta}{h}$ (el coseno de β).

b) i) $h = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ cm. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$. $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{4}{3}$.

b) ii) Altura (cateto opuesto): $\operatorname{tg} 10° = \dfrac{h}{8} \Rightarrow h = 8 \cdot \operatorname{tg} 10° = 1{,}41$ m. Rampa (hipotenusa): $\cos 10° = \dfrac{8}{L} \Rightarrow L = \dfrac{8}{\cos 10°} = 8{,}12$ m.