COLECCIÓN PRÁCTICA GUIADA · MATEMÁTICAS

Números, radicales, proporcionalidad y polinomios

Del repaso al nivel de 4.º de ESO

Ejercicios resueltos en vídeo · Ejercicios guiados
Ejercicios de examen · Solucionario

Con el vídeo de cada ejercicio resuelto (código QR)



TodoSobresaliente
www.TodoSobresaliente.com

Números, radicales, proporcionalidad y polinomios. Del repaso al nivel de 4.º de ESO

Primera edición, 2026
© TodoSobresaliente. Todos los derechos reservados.

ISBN (papel): [ISBN papel pendiente]
ISBN (digital): [ISBN digital pendiente]

Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin autorización del autor.

Web: www.TodoSobresaliente.com
Contacto: profesor@todosobresaliente.com

Índice

Cómo usar este cuaderno **iv**

1 Números, fracciones y potencias **1**
1 Descomponer un número en factores primos 2
2 El máximo común divisor 5
3 De decimal a fracción: exactos y periódicos puros 8
4 De decimal a fracción: periódicos mixtos 11
5 La fracción de una cantidad 14
6 El total a partir de una parte 17
7 Trabajar juntos: sumar velocidades 20
8 Grifo y desagüe: una velocidad que resta 23
9 La fracción de una fracción 26
10 Exponente negativo, exponente cero y signos 29
11 Propiedades de las potencias con números 32
12 Propiedades de las potencias con letras 35
13 Escribir números en notación científica 38
14 Multiplicar y dividir en notación científica 41
15 Sumar y restar en notación científica 44

2 Radicales **47**
16 Extraer factores de un radical 48
17 Introducir factores en un radical 51
18 Sumar, multiplicar y dividir radicales 53
19 Multiplicar radicales de distinto índice 56
20 Racionalizar: un radical en el denominador 59
21 Racionalizar multiplicando por el conjugado 62

3 Proporcionalidad y porcentajes **65**
22 Regla de tres simple directa 66
23 Regla de tres simple inversa 69
24 Regla de tres compuesta: directa e inversa 72
25 Regla de tres compuesta mixta 75
26 El porcentaje de una cantidad 78

27 El total y el tanto por ciento 81
28 Descuentos porcentuales inversos 84
29 Aumentos porcentuales inversos 87

4 Polinomios y fracciones algebraicas 90
30 El mínimo común múltiplo de polinomios 91
31 Simplificar fracciones algebraicas 94
32 Sumar fracciones algebraicas 97

Examen tipo 1 100

Examen tipo 2 102

Solucionario 104

Resumen de reglas 118

Hoja de seguimiento 119

Recursos complementarios 120

Cómo usar este cuaderno

Este cuaderno no es una lista de enunciados con soluciones al final: es una **ruta de práctica**. Cada ficha parte de un ejercicio resuelto en un vídeo del canal y te lleva, paso a paso, a resolver tú solo un ejercicio de examen.

Para quién es

Está pensado para alumnos de **4.º de ESO**, pero empieza desde abajo. Las fichas de cada bloque van **de menos a más difíciles**: las primeras sirven para repasar lo de cursos anteriores y las últimas, igual que los dos exámenes tipo del final, tienen el nivel de un examen de 4.º. Si un bloque lo dominas, empieza por sus últimas fichas; si te cuesta, empieza por el principio.

Qué encontrarás en cada ficha

Cada ficha sigue siempre el mismo camino, y en cada paso tienes un poco menos de ayuda. El icono que va delante de cada ejercicio te dice cuánta ayuda queda: el círculo se va vaciando.

1. ● **Ejercicio resuelto**: el del vídeo, resuelto paso a paso. Escanea el QR del margen para verlo. Debajo del enunciado tienes las **matemáticas que vas a usar**, con un vídeo de repaso para cada una (también en el margen).
2. ◑ **Guiado 1**: mismo método, otros datos. Completa los huecos numerados.
3. ◔ **Guiado 2**: pasos completos para escribir en la cuadrícula de puntos y algunas pistas en forma de pregunta.
4. ○ **Ejercicio de examen**: lo resuelves tú solo en la cuadrícula. Al pie tienes el resultado final **impreso del revés**, para que no lo veas sin querer: gira el cuaderno para comprobarlo.

En el margen de cada ejercicio tienes dos casillas, □ hecho □ repasar: marca «hecho» cuando te salga y «repasar» si quieres volver a él antes del examen. La raya bajo el título también cambia con el tipo de ejercicio (gruesa, fina, de trazos o doble), así que se distinguen aunque imprimas en blanco y negro.

El solucionario

Las respuestas de todos los huecos están en el **solucionario**, al final del libro, con el mismo número de hueco. Cada ficha te dice en qué página están sus respuestas. Inténtalo antes de mirarlas: si te equivocas, vuelve al ejercicio resuelto o al vídeo.

Método de estudio recomendado

- Mira el vídeo del ejercicio resuelto y después léelo tapando cada paso: intenta anticipar el siguiente.
- Si te atascas con algo que deberías saber de antes, usa los vídeos de repaso del margen.
- No mires el solucionario hasta haber intentado el guiado al menos 10 minutos.
- El ejercicio de examen es la prueba de verdad: si te sale, la ficha está dominada.
- Salvo que el enunciado diga otra cosa, intenta hacer las cuentas sin calculadora, como en el examen.

Al final del libro tienes un resumen con las reglas y fórmulas que se usan y una hoja de seguimiento.

BLOQUE 1

Números, fracciones y potencias

FICHA 1

Descomponer un número en factores primos

Vídeo: «Descomponer en factores primos. Aprende Matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 104

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Vídeo del ejercicio
«Descomponer en factores primos» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/numeros-01

Enunciado. Descompón en factores primos los números 20, 108 y 1024.

Nota sobre el vídeo: *aunque se mencione en el vídeo, el 1 no se considera número primo: un número primo debe tener 2 divisores (el 1 y él mismo), y el 1 solo tiene un divisor.*

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- Para esta ficha solo necesitas saber dividir y conocer los primeros números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13... Es el punto de partida de las fichas siguientes (m.c.d., fracciones y radicales).

Solución

1. ¿Qué es un número primo?. Un número primo es el que solo se puede dividir (de forma exacta) entre sí mismo y entre la unidad. El 2 es primo; el 4 no, porque también se puede dividir entre 2. Los primeros primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13... y hay infinitos. Todo número se puede escribir como un **producto formado solo por números primos**: eso es descomponerlo en factores primos.

2. El número 20. Probamos a dividir empezando **siempre por el primo más pequeño**, el 2, y lo repetimos mientras se pueda. Cuando ya no se puede, pasamos al siguiente primo. Terminamos cuando nos queda un 1.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

El 5 no se puede dividir entre 2 ni entre 3, así que probamos con el 5. Importante: hay que seguir el orden (2, 3, 5...). Si empezamos por un primo mayor, a veces sale bien, pero otras nos líamos.

3. El número 108. Aunque sea más grande, se hace igual. 108 es par: entre 2. 54 también: entre 2. 27 ya no es par, así que pasamos al 3 y lo repetimos mientras se pueda.

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 108 = 2^2 \cdot 3^3$$

4. El número 1024. Siempre dividimos por el primo más pequeño posible, aunque se pudiera dividir por un número mayor: la mitad de 1024 es 512; luego 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2 y 1. Hemos dividido diez veces entre 2:

$$1024 = 2^{10}$$

Un número que se descompone usando un solo factor primo es una **potencia exacta** de ese primo.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Descompón en factores primos los números 60 y 84.

1. El 60.

60	2
30	(1)
(2)	3
5	(3)
1	

$\Rightarrow \quad 60 =$ (4)

2. El 84.

84	2
42	2
(5)	3
(6)	7
1	

$\Rightarrow \quad 84 =$ (7)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Descompón en factores primos 360 y 1575. ¿Alguno de los dos es una potencia exacta de un primo?

1. El 360. *Pista: empieza por el 2 y repítelo mientras el número sea par.*

(1)

2. El 1575. *Pista: no es par: ¿se puede dividir entre 3? Suma sus cifras.*

(2)

3. ¿Potencia exacta?.

(3)

◯ Ejercicio de examen

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Descompón en factores primos 2520 y 1089.
b) Comprueba con la descomposición que 1089 es un cuadrado perfecto y di de qué número.
c) ¿Es 2520 divisible entre 12? Justifícalo usando solo su descomposición.

Resultado para comprobar: a) $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $1089 = 3^2 \cdot 11^2$ b) $1089 = (3 \cdot 11)^2 = 33^2$ c) Sí: $12 = 2^2 \cdot 3$ y en 2520 están 2^2 y 3.

FICHA 2

El máximo común divisor

Vídeo: «Calcular el máximo común divisor, o m.c.d. Aprende Matemáticas» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 104

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Escribe los divisores de 20 y de 30 y, a partir de ellos, di cuál es su máximo común divisor.
b) Calcula descomponiendo en factores primos: m.c.d.(20, 30), m.c.d.(300, 147) y m.c.d.(25, 49).

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ **Descomponer en factores primos.** Para escribir cada número como producto de primos, que es el primer paso del cálculo.

Vídeo del ejercicio
«Calcular el máximo común divisor, o m.c.d.» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/numeros-02

Repaso: Descomponer en factores primos

Solución

a) Los divisores. Los divisores de un número son los números entre los que se puede dividir de forma exacta. Se buscan del propio número hacia abajo (un número mayor nunca da una división exacta), y el 1 siempre está.

$$\text{Div}(20) = \{20, 10, 5, 4, 2, 1\} \qquad \text{Div}(30) = \{30, 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1\}$$

Los comunes son 10, 5, 2 y 1. El **máximo** común divisor es el mayor de ellos: m.c.d.(20, 30) = 10.

Este método sirve para entender qué es el m.c.d., pero con números grandes es inviable. Por eso se calcula así:

b) Primer paso: descomponer en factores primos.

$$20 = 2^2 \cdot 5 \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Segundo paso: factores comunes con el menor exponente. Al contrario que en el mínimo común múltiplo, aquí cogemos **solo los factores que se repiten** y, de cada uno, el de **menor exponente**. El 2 está en los dos (2^2 y 2): cogemos 2. El 5 también: cogemos 5. El 3 no es común: no se coge.

$$\text{m.c.d.}(20,30) = 2 \cdot 5 = 10$$

Sale lo mismo que contando divisores.

m.c.d.(300, 147).

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

147	3
49	7
7	7
1	

$147 = 3 \cdot 7^2$

(147 no es par; es múltiplo de 3 porque $1 + 4 + 7 = 12$.) El único factor común es el 3:

$$\text{m.c.d.}(300,147) = 3$$

Es el número más grande entre el que se pueden dividir a la vez 300 y 147.

m.c.d.(25, 49): no hay factores comunes.

$$25 = 5^2 \qquad 49 = 7^2$$

Aparentemente no hay ningún factor común. Pero el 1 siempre lo es: cualquier número se puede multiplicar por 1 sin cambiar, aunque no se suela escribir. Cuando dos números no tienen otros divisores comunes, su m.c.d. es 1:

$$\text{m.c.d.}(25,49) = 1$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula m.c.d.(36, 48) descomponiendo en factores primos.

1. Descomponemos.

$$36 = 2^{\text{(1)}} \cdot 3^2 \qquad 48 = 2^4 \cdot \text{(2)}$$

2. Factores comunes con el menor exponente. El 2 está en los dos; el menor exponente es (3). El 3 también; el menor exponente es (4).

3. Resultado.

$$\text{m.c.d.}(36,48) = \text{(5)} = \text{(6)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula m.c.d.(180, 252) y m.c.d.(64, 81).

1. Descomposición de los cuatro números. *Pista: empieza siempre por el 2.*

(1)

2. m.c.d.(180, 252). *Pista: ¿qué factores están en los dos? ¿Con qué exponente los coges?*

(2)

3. m.c.d.(64, 81).

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un carpintero tiene dos listones de madera, uno de 180 cm y otro de 240 cm. Quiere cortarlos en trozos iguales, lo más largos posible y sin que sobre nada.

a) ¿Cuánto medirá cada trozo?
b) ¿Cuántos trozos obtendrá en total?
c) Si también quisiera cortar del mismo modo un tercer listón de 210 cm, ¿cuánto mediría cada trozo?

Resultado para comprobar: a) m.c.d.(180, 240) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ cm b) $3 + 4 = 7$ trozos
c) m.c.d.(180, 240, 210) = 30 cm

FICHA 3

De decimal a fracción: exactos y periódicos puros

Vídeo: «Pasar de decimal a fracción. Fracción generatriz. Aprende Matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 105

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe en forma de fracción los siguientes números decimales:

a) Exactos: 0,28; 3,578; 0,002.

b) Periódicos puros: $2,\overline{98}$; $0,\overline{1}$; $0,\overline{08}$; $45,\overline{3}$; $0,\overline{157}$.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ Solo necesitas saber restar y saber qué es la parte entera, la parte decimal y el periodo de un número. Al final, si el ejercicio lo pide, se simplifica la fracción (con el m.c.d. de la ficha anterior).

Vídeo del ejercicio
«Pasar de decimal a fracción. Fracción generatriz» (desde el minuto 0:32)
todosobresaliente.com/v/numeros-03

Solución

a) Decimales exactos. Se escribe el número entero, sin la coma, y se divide entre la unidad seguida de **tantos ceros como cifras decimales** tenga.

$$0,28 = \frac{28}{100} \qquad 3,578 = \frac{3578}{1000} \qquad 0,002 = \frac{2}{1000}$$

Si el ejercicio lo pide, la fracción se simplifica después; aquí solo pasamos de decimal a fracción.

b) Decimales periódicos puros. Tienen una parte decimal que se repite desde justo después de la coma (el periodo): $2,\overline{98} = 2,989898\ldots$

- Arriba: el número escrito entero, sin coma ni periodo, **menos** lo que queda si le quitamos el periodo.
- Abajo: **tantos nueves como cifras tenga el periodo**.

$$2,\overline{98} = \frac{298-2}{99} = \frac{296}{99} \qquad 0,\overline{1} = \frac{1-0}{9} = \frac{1}{9} \qquad 0,\overline{08} = \frac{8-0}{99} = \frac{8}{99}$$

$$45,\overline{3} = \frac{453-45}{9} = \frac{408}{9} \qquad 0,\overline{157} = \frac{157-0}{999} = \frac{157}{999}$$

Cuando al quitar el periodo solo queda un 0, no hace falta restar nada.

Comprobación. Si haces la división con la calculadora tiene que salir el número del principio: $296 : 99 = 2,989898\ldots$ y $8 : 99 = 0,080808\ldots$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe como fracción: $1{,}25$; $0{,}\overline{6}$; $3{,}\overline{12}$.

1. Decimal exacto.

$$1{,}25 = \frac{(1)}{(2)}$$

2. Periódico puro con una cifra en el periodo.

$$0{,}\overline{6} = \frac{6-0}{(3)} = \frac{6}{9}$$

3. Periódico puro con dos cifras en el periodo.

$$3{,}\overline{12} = \frac{(4)}{99} - \frac{(5)}{99} = \frac{(6)}{99}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe como fracción y simplifica si se puede: $0{,}045$; $12{,}\overline{7}$; $0{,}\overline{324}$.

1. $0{,}045$. *Pista: ¿cuántas cifras decimales tiene? Después simplifica dividiendo arriba y abajo entre el m.c.d.*

(1)

2. $12{,}\overline{7}$.

(2)

3. $0{,}\overline{324}$. *Pista: ¿cuántos nueves van abajo?*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Halla la fracción generatriz irreducible de 2,4 y de $1,\overline{36}$.

b) Calcula $2,4 + 1,\overline{36}$ operando con las fracciones y da el resultado como fracción irreducible.

c) ¿Es $0,\overline{9}$ igual a 1? Justifícalo con su fracción generatriz.

Resultado para comprobar: a) $2,4 = \frac{12}{5}$; $1,\overline{36} = \frac{135}{99} = \frac{15}{11}$ b) $\frac{12}{5} + \frac{15}{11} = \frac{207}{55}$ c) Sí: $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$

FICHA 4

De decimal a fracción: periódicos mixtos

Vídeo: «Pasar de decimal a fracción. Fracción generatriz. Aprende Matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 105

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe en forma de fracción los siguientes números decimales periódicos mixtos:

$$1{,}0\overline{27} \qquad 3{,}54\overline{9} \qquad 0{,}17\overline{32} \qquad 27{,}34\overline{1}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ Es la misma regla que la de los periódicos puros de la ficha anterior, con un añadido: los ceros del denominador. Repásala si no la recuerdas.

Vídeo del ejercicio
«Pasar de decimal a fracción. Fracción generatriz» (desde el minuto 6:00)
todosobresaliente.com/v/numeros-04

Solución

1. La regla. En un periódico mixto, entre la coma y el periodo hay cifras que no se repiten (el anteperiodo). Se hace casi igual que en los puros:

- Arriba: el número entero sin coma ni periodo **menos** lo que queda al quitarle el periodo.
- Abajo: **tantos nueves como cifras tenga el periodo** y, detrás, **tantos ceros como cifras haya entre la coma y el periodo**.

2. $1{,}0\overline{27}$. Si quitamos el periodo queda 1,0, es decir, 10. El periodo tiene dos cifras (dos nueves) y entre la coma y el periodo hay una cifra (un cero):

$$1{,}0\overline{27} = \frac{1027 - 10}{990} = \frac{1017}{990}$$

3. $3{,}54\overline{9}$. Sin el periodo queda 354. Un nueve (el periodo tiene una cifra) y dos ceros (el 5 y el 4):

$$3{,}54\overline{9} = \frac{3549 - 354}{900} = \frac{3195}{900}$$

4. $0{,}17\overline{32}$. Sin el periodo queda 17. Dos nueves y dos ceros:

$$0{,}17\overline{32} = \frac{1732 - 17}{9900} = \frac{1715}{9900}$$

5. $27{,}34\overline{1}$. Sin el periodo queda 2734. Un nueve y dos ceros (dos cifras decimales no periódicas):

$$27{,}34\overline{1} = \frac{27341 - 2734}{900} = \frac{24607}{900}$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe como fracción: $0{,}1\overline{6}$ y $2{,}3\overline{45}$.

1. $0{,}1\overline{6}$. Sin el periodo queda $____^{(1)}$. Abajo: un nueve y $____^{(2)}$ cero.

$$0{,}1\overline{6} = \frac{16 - ____^{(3)}}{____^{(4)}} = \frac{____^{(5)}}{90}$$

2. $2{,}3\overline{45}$.

$$2{,}3\overline{45} = \frac{2345 - ____^{(6)}}{____^{(7)}} = \frac{____^{(8)}}{990}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe como fracción irreducible: $0{,}8\overline{3}$ y $1{,}12\overline{5}$.

1. $0{,}8\overline{3}$. *Pista: ¿cuántos nueves y cuántos ceros lleva el denominador? Después simplifica.*

(1)

2. $1{,}12\overline{5}$.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Clasifica estos números en decimal exacto, periódico puro o periódico mixto y halla la fracción generatriz irreducible de cada uno: $0{,}3\overline{18}$; $0{,}\overline{18}$; $0{,}18$.

b) Calcula $0{,}3\overline{18} - 0{,}\overline{18}$ con las fracciones y comprueba el resultado restando los decimales.

Resultado para comprobar: a) Mixto: $\frac{315}{990} = \frac{7}{22}$; puro: $\frac{18}{99} = \frac{2}{11}$; exacto: $\frac{18}{100} = \frac{9}{50}$ b) $\frac{7}{22} - \frac{4}{22} = \frac{3}{22} = 0{,}1\overline{36}$

FICHA 5

La fracción de una cantidad

Vídeo: «Guía definitiva para resolver problemas con fracciones.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 105

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Me he comido los $\frac{3}{4}$ de una tarta. ¿Qué fracción me queda por comer?

b) Tenía 60 € y me he gastado $\frac{2}{3}$. ¿Cuánto dinero me queda?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Sumar y restar fracciones.** Para restar al total (el 1) la parte que se ha gastado o comido.
- **Multiplicar fracciones.** Para calcular la fracción de una cantidad: $\frac{2}{3}$ de 60 es $\frac{2}{3} \cdot 60$.

Vídeo del ejercicio «Guía definitiva para resolver problemas con fracciones» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/numeros-05

Repaso: Sumar y restar fracciones

Repaso: Multiplicar fracciones

Solución

a) Lo que queda de la tarta. $\frac{3}{4}$ significa que la tarta se ha partido en 4 partes iguales y me he comido 3. Se ve en el dibujo que queda una parte, $\frac{1}{4}$, pero ¿qué cuenta hay que hacer? Al total (la tarta entera, el 1) le quitamos lo que me he comido. El 1 es lo mismo que $\frac{4}{4}$: las cuatro partes de cuatro.

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Me queda $\frac{1}{4}$ de la tarta.

b) Primera forma: calculo lo que me he gastado. Ahora ya no trabajamos solo con fracciones, sino con una cantidad. Para calcular la fracción de una cantidad, el «de» se cambia por un «por»:

$$\frac{2}{3} \text{ de } 60 = \frac{2}{3} \cdot 60 = \frac{2 \cdot 60}{3 \cdot 1} = \frac{120}{3} = 40\,€$$

Eso es lo que me he gastado. Me quedan $60 - 40 = 20$ €.

b) Segunda forma: calculo la fracción que me queda. Si me he gastado $\frac{2}{3}$, me queda $1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ del dinero. Y un tercio de 60 es

$$\frac{1}{3} \cdot 60 = \frac{60}{3} = 20\,€$$

Las dos formas dan lo mismo. Si un problema está bien hecho de otra manera, está bien hecho.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Una botella tiene 1500 ml de zumo y me bebo $\frac{2}{5}$. ¿Cuántos mililitros me he bebido y cuántos quedan?

1. Lo que me he bebido.

$$\frac{2}{5} \text{ de } 1500 = \frac{2 \cdot \text{(1)}}{5} = \text{(2)} \text{ ml}$$

2. Lo que queda (primera forma).

$$1500 - \text{(3)} = \text{(4)} \text{ ml}$$

3. Lo que queda (segunda forma). Queda $1 - \frac{2}{5} =$ (5) de la botella, y $\frac{3}{5} \cdot 1500 =$ (6) ml.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. De los 840 alumnos de un instituto, $\frac{3}{7}$ van al centro en autobús y $\frac{1}{4}$ andando. El resto va en bici. ¿Cuántos alumnos van de cada forma?

1. Alumnos en autobús y andando. *Pista: calcula la fracción de una cantidad en cada caso.*

(1)

2. Alumnos en bici. *Pista: puedes restar los alumnos, o calcular primero la fracción que queda:* $1 - \frac{3}{7} - \frac{1}{4}$.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Laura cobra 1200 € al mes. Dedica $\frac{1}{3}$ al alquiler, $\frac{1}{4}$ a la comida y $\frac{1}{6}$ al transporte, y ahorra el resto.

a) ¿Qué fracción del sueldo ahorra?

b) ¿Cuánto dinero dedica a cada cosa y cuánto ahorra al mes?

Resultado para comprobar: a) $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ b) Alquiler 400 €; comida 300 €; transporte 200 €; ahorra 300 €

FICHA 6

El total a partir de una parte

Vídeo: «Guía definitiva para resolver problemas con fracciones.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 106

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Me he gastado $\frac{2}{3}$ del dinero que tenía y me quedan 20 €. ¿Cuánto dinero tenía al principio?

b) Los $\frac{2}{5}$ del dinero que me han dado son 40 €. ¿Cuánto me han dado en total?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Multiplicar fracciones.** Para plantear «una fracción de una cantidad desconocida x».
- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar x: lo que divide pasa multiplicando y lo que multiplica pasa dividiendo.

Vídeo del ejercicio «Guía definitiva para resolver problemas con fracciones» (desde el minuto 6:09)
todosobresaliente.com/v/numeros-06

Repaso: Multiplicar fracciones

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

a) ¿Qué fracción me queda?. Es el problema anterior al revés. Si divido el dinero en 3 partes y me gasto 2, me queda $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ del total. Y esa parte son 20 €. Con estos números se ve enseguida: si cada tercio son 20, el total son 20 + 20 + 20 = 60 €. Pero con números más difíciles hay que saber hacer la cuenta.

a) La cuenta. Ya no me piden la parte de un total, sino **el total sabiendo lo que vale una parte**. Llamamos x al total:

$$\frac{1}{3} \cdot x = 20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3 \cdot 20}{1} = 60\,€$$

Es como una ecuación: el 3, que divide, pasa multiplicando; el 1, que multiplica, pasa dividiendo. Es justo lo contrario de cuando calculábamos la parte.

b) Lo mismo con otra fracción. Si nos dieran el total, 100 €, sus $\frac{3}{5}$ serían $\frac{3 \cdot 100}{5} = 60$ €: eso es calcular la parte. Ahora es al revés: no sabemos el total, pero sabemos que sus $\frac{2}{5}$ son 40 €:

$$\frac{2}{5} \cdot x = 40 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{40 \cdot 5}{2} = \frac{200}{2} = 100\,€$$

Hay que distinguir siempre si me piden **la parte de un total** o **el total conociendo una parte**.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. He leído $\frac{3}{8}$ de un libro y todavía me quedan 150 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

1. Fracción que queda por leer.

$$1 - \frac{3}{8} = \underline{\quad(1)\quad}$$

2. Planteamiento.

$$\underline{\quad(2)\quad} \cdot x = 150$$

3. Despejamos.

$$x = \frac{150 \cdot \underline{\quad(3)\quad}}{\underline{\quad(4)\quad}} = \underline{\quad(5)\quad} \text{ páginas}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En un depósito se han gastado $\frac{4}{9}$ del gasóleo y quedan 350 L. ¿Cuántos litros había al principio? ¿Cuántos se han gastado?

1. ¿Qué fracción del depósito son los 350 L?.

(1)

2. Planteamiento y despeje. *Pista: ¿me piden la parte o el total?*

(2)

3. Litros gastados.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una excursión, el primer día se recorren $\frac{2}{7}$ del camino y el segundo día $\frac{1}{3}$. Todavía quedan 40 km.

a) ¿Qué fracción del camino queda por recorrer?
b) ¿Cuántos kilómetros tiene el camino?
c) ¿Cuántos kilómetros se recorrieron cada día?

Resultado para comprobar: a) $1-\frac{2}{7}-\frac{1}{3}=\frac{8}{21}$ b) $\frac{8}{21}x=40 \Rightarrow x=105$ km c) Primer día 30 km; segundo día 35 km

FICHA 7

Trabajar juntos: sumar velocidades

Vídeo: «Guía definitiva para resolver problemas con fracciones.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 106

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un padre labra un campo en 6 horas. Si le ayuda su hija, tardan entre los dos 4 horas. ¿Cuánto tardaría en labrar el campo la hija sola?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Sumar y restar fracciones.** Para restar $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$ con el mínimo común múltiplo.
- **Mínimo común múltiplo.** Para calcular el denominador común: m.c.m.(4, 6) = 12.
- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar la velocidad de la hija.

Vídeo del ejercicio
«Guía definitiva para resolver problemas con fracciones» (desde el minuto 13:26)
todosobresaliente.com/v/numeros-07

Repaso: Sumar y restar fracciones

Repaso: Mínimo común múltiplo

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

1. Lo que se suma son las velocidades. Aquí no trabajamos con cantidades, sino con la **velocidad** a la que se hace algo: lo que se hace dividido entre el tiempo que se tarda. Igual que 100 km/h significa 100 km en una hora, el padre labra «un campo cada 6 horas»: su velocidad es $\frac{1}{6}$ de campo por hora.

Si la hija fuera igual de rápida que el padre, irían el doble de rápido y tardarían la mitad, 3 horas. Pero no lo es, y por eso hay que trabajar con las velocidades.

2. La ecuación. La velocidad del padre más la velocidad de la hija es la velocidad de los dos juntos (un campo cada 4 horas):

$$v_P + v_H = v_{\text{juntos}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} + v_H = \frac{1}{4}$$

3. Despejamos. El $\frac{1}{6}$, que está sumando, pasa restando:

$$v_H = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12} - \frac{2}{12} = \frac{1}{12}$$

La hija labra un campo cada 12 horas: sola, **tardaría 12 horas**.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Ana pinta una valla en 3 horas y, si la ayuda su hermano, la pintan en 2 horas. ¿Cuánto tardaría el hermano solo?

1. Velocidades. Ana: (1) de valla por hora. Los dos juntos: (2) de valla por hora.

2. Ecuación y despeje.

$$\frac{1}{3} + v_H = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v_H = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{(3)}{6} - \frac{(4)}{6} = (5)$$

3. Respuesta. El hermano solo tardaría (6) horas.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Una máquina tarda 10 horas en envasar un pedido. Con la ayuda de una segunda máquina, el pedido se envasa en 6 horas. ¿Cuánto tardaría la segunda máquina sola?

1. Velocidad de cada máquina y de las dos juntas.

(1)

2. Ecuación. *Pista: la velocidad de la primera más la de la segunda es la de las dos juntas.*

(2)

3. Despeje y respuesta.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Tres amigos montan juntos un mueble. Luis solo tardaría 4 horas y Marta sola 6 horas. Con la ayuda de Pablo, los tres lo montan en 1 hora y media.

a) ¿Cuánto tardarían en montarlo Luis y Marta juntos, sin Pablo?
b) ¿Cuánto tardaría Pablo solo?

Resultado para comprobar: a) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$: tardan $\frac{12}{5}=2{,}4$ h (2 h 24 min) b) $v_P=\frac{2}{3}-\frac{5}{12}=\frac{1}{4}$: Pablo tardaría 4 horas

FICHA 8

Grifo y desagüe: una velocidad que resta

Vídeo: «Guía definitiva para resolver problemas con fracciones.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 107

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un grifo tarda 12 horas en llenar un depósito. Si el tapón del desagüe está abierto, tarda 18 horas en llenarse. ¿Cuánto tardaría en vaciarse el depósito, lleno y con el grifo cerrado, al quitar el tapón?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Sumar y restar fracciones.** Para restar $\frac{1}{18} - \frac{1}{12}$.
- ▹ **Mínimo común múltiplo.** Para el denominador común: m.c.m.(12, 18) = 36.
- ▹ **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar la velocidad del desagüe, cambiando el signo al final.

Vídeo del ejercicio
«Guía definitiva para resolver problemas con fracciones» (desde el minuto 18:52)
todosobresaliente.com/v/numeros-08

Repaso: Sumar y restar fracciones

Repaso: Mínimo común múltiplo

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

1. Las velocidades. Es el mismo problema que el del padre y la hija, pero ahora una velocidad suma (el grifo llena) y la otra resta (el desagüe vacía). Con el desagüe abierto el depósito tarda más en llenarse, pero acaba llenándose: el grifo echa más agua de la que sale por el tapón.

- Grifo: un depósito cada 12 horas, $\frac{1}{12}$ de depósito por hora.
- Desagüe: v_D, lo que nos piden. Lleva signo menos porque quita agua.
- Los dos juntos: un depósito cada 18 horas, $\frac{1}{18}$.

2. La ecuación.

$$v_G - v_D = v_{\text{juntos}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{12} - v_D = \frac{1}{18}$$

3. Despejamos. El $\frac{1}{12}$ pasa restando al otro lado. m.c.m.(18, 12) = 36:

$$-v_D = \frac{1}{18} - \frac{1}{12} = \frac{2}{36} - \frac{3}{36} = -\frac{1}{36}$$

Si los dos lados son negativos, es lo mismo que si los dos son positivos (multiplicamos por -1): $v_D = \frac{1}{36}$.

El desagüe vacía un depósito cada 36 horas: **tardaría 36 horas** en vaciarse.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un grifo llena una piscina en 4 horas. Con el desagüe abierto, la llena en 6 horas. ¿Cuánto tardaría el desagüe en vaciar la piscina llena?

1. Ecuación.

$$\frac{1}{\text{(1)}} - v_D = \frac{1}{\text{(2)}}$$

2. Despeje.

$$-v_D = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{\text{(3)}}{12} - \frac{\text{(4)}}{12} = \underline{\text{(5)}} \quad \Rightarrow \quad v_D = \underline{\text{(6)}}$$

3. Respuesta. El desagüe vaciaría la piscina en ___(7)___ horas.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un grifo llena un depósito en 5 horas y el desagüe, con el grifo cerrado, lo vacía en 8 horas. Si el depósito está vacío y abrimos a la vez el grifo y el desagüe, ¿cuánto tarda en llenarse?

1. ¿Qué nos piden ahora?. *Pista: ahora conocemos las dos velocidades y nos piden la de los dos juntos.*

(1)

2. Cálculo.

(2)

3. Respuesta.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Un depósito tiene dos grifos y un desagüe. El grifo A lo llena en 6 horas y el grifo B en 9 horas. Con los dos grifos y el desagüe abiertos a la vez, el depósito vacío se llena en 6 horas.

a) ¿Cuánto tardarían en llenarlo los dos grifos juntos con el desagüe cerrado?

b) ¿Cuánto tardaría el desagüe en vaciar el depósito lleno, con los grifos cerrados?

Resultado para comprobar: a) $\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}:\frac{18}{5}=3{,}6\text{ h }(3\text{ h }36\text{ min})$ b) $v_D=\frac{5}{18}-\frac{1}{6}=\frac{1}{9}:9$ horas

FICHA 9

La fracción de una fracción

Vídeo: «Guía definitiva para resolver problemas con fracciones.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 107

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. En una fiesta, $\frac{2}{3}$ de la gente son chicos. De las chicas, $\frac{2}{5}$ llevan falda y el resto pantalón. Si 6 chicas llevan pantalón, ¿cuánta gente hay en la fiesta?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Multiplicar fracciones.** Para calcular la fracción de una fracción: $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$ es $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}$.
- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar el total x.

Vídeo del ejercicio
«Guía definitiva para resolver problemas con fracciones» (desde el minuto 24:14)
todosobresaliente.com/v/numeros-09

Repaso: Multiplicar fracciones

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

1. Un dibujo para entender el enunciado. Siempre ayuda dibujar. El cuadrado es la gente de la fiesta: lo dividimos en 3 partes y 2 son chicos, así que las chicas son $\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ del total.

Ese tercio de chicas lo dividimos en 5 partes: 2 llevan falda, así que llevan pantalón $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ **de las chicas**. Ojo: no son $\frac{3}{5}$ de toda la gente, sino $\frac{3}{5}$ de un tercio.

2. Primera forma: todo de una vez. $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{3}$ del total x son 6 personas. Cambiamos los «de» por «por»:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot x = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 3} x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15 \cdot 6}{3} = 30$$

En la fiesta hay **30 personas**.

3. Segunda forma: empezando por el final. El único número del problema son las 6 chicas con pantalón, que son $\frac{3}{5}$ de las chicas. ¿Cuántas chicas hay?

$$\frac{3}{5} \cdot x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \cdot 5}{3} = 10 \text{ chicas}$$

Y esas 10 chicas son $\frac{1}{3}$ de la gente:

$$\frac{1}{3} \cdot x = 10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{10 \cdot 3}{1} = 30 \text{ personas}$$

Sale lo mismo, en dos pasos.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una clase, $\frac{3}{4}$ de los alumnos aprueban Matemáticas. De los que aprueban, $\frac{1}{3}$ saca sobresaliente. Si hay 6 sobresalientes, ¿cuántos alumnos hay en la clase?

1. Fracción del total que saca sobresaliente.

$$\frac{1}{3}\text{ de }\frac{3}{4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \underline{\quad(1)\quad}$$

2. Planteamiento y despeje.

$$\underline{\quad(2)\quad}\cdot x = 6 \quad\Rightarrow\quad x = \underline{\quad(3)\quad}\text{ alumnos}$$

3. Comprobación empezando por el final. Los aprobados son $6 \cdot 3 =$ $\underline{\quad(4)\quad}$, y esos son $\frac{3}{4}$ de la clase: $x = \frac{18\cdot 4}{3} =$ $\underline{\quad(5)\quad}$.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un agricultor siembra $\frac{2}{5}$ de su finca de trigo. Del resto, $\frac{1}{4}$ es de olivos y lo demás de viña. Si la viña ocupa 18 hectáreas, ¿cuántas hectáreas tiene la finca?

1. Fracción del resto y fracción de la viña. *Pista: ¿qué fracción de la finca queda después del trigo? ¿Y qué fracción de ese resto es viña?*

(1)

2. Fracción de la finca que es viña.

(2)

3. Planteamiento y resultado.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. María gasta $\frac{1}{4}$ de su paga en el cine y $\frac{2}{3}$ de lo que le queda en ropa. Todavía le quedan 15 €.

a) ¿Qué fracción de la paga gasta en ropa?
b) ¿Qué fracción de la paga le queda?
c) ¿Cuánto dinero tenía? ¿Cuánto gastó en el cine y en ropa?

Resultado para comprobar: a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ b) $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ c) 60 €; cine 15 €, ropa 30 €

FICHA 10

Exponente negativo, exponente cero y signos

Vídeo: «Potencias, notación científica y radicales» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 107

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula el valor de las siguientes potencias:

$$3^{-2} \qquad (-4)^2 \qquad -5^2 \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^1 \qquad \left(\frac{8}{5}\right)^{-1} \qquad -8^0 \qquad 3^2 \cdot 3 + 3^0$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Números negativos al cuadrado.** Para no equivocarte con el signo menos y el cuadrado: no es lo mismo $(-4)^2$ que -4^2.

Vídeo del ejercicio «Potencias, notación científica y radicales» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/numeros-10

Repaso: Números negativos al cuadrado

Solución

1. Exponente negativo. El signo menos del exponente significa que la potencia, si está arriba, en realidad está abajo (y al revés):

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$$

2. El signo menos y el cuadrado. Si el menos está **dentro del paréntesis**, el cuadrado le afecta: menos por menos es más.

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

Si **no hay paréntesis**, el cuadrado solo afecta al 5 y el menos se queda fuera:

$$-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

3. Exponente 1. Elevar a 1 es como no elevar a nada (igual que multiplicar por 1): $\left(\frac{4}{3}\right)^1 = \frac{4}{3}$.

4. Exponente -1 en una fracción. Arriba y abajo cambian de sitio: le damos la vuelta a la fracción y el exponente pasa a ser positivo.

$$\left(\frac{8}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^1 = \frac{5}{8}$$

5. Exponente 0. Cualquier número (distinto de 0) elevado a 0 vale 1. Pero en -8^0 no hay paréntesis: el menos se queda fuera.

$$-8^0 = -1 \qquad \text{(en cambio, } (-8)^0 = 1\text{)}$$

6. Una pequeña cuenta. Si solo nos pidieran escribirlo como potencia, $3^2 \cdot 3 = 3^3$. Pero luego hay que sumar, así que calculamos:

$$3^2 \cdot 3 + 3^0 = 9 \cdot 3 + 1 = 27 + 1 = 28$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula: 2^{-3}; $(-3)^2$; -3^2; $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$; $(-6)^0$.

1. Exponente negativo.

$$2^{-3} = \frac{1}{\text{(1)}} = \text{(2)}$$

2. Con y sin paréntesis.

$$(-3)^2 = \text{(3)} \qquad -3^2 = \text{(4)}$$

3. Fracción con exponente -1 y exponente 0.

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-1} = \text{(5)} \qquad (-6)^0 = \text{(6)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $-2^4 + (-2)^4$; $5^0 - 5^{-1}$; $(-1)^7 \cdot 2^{-1}$.

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$**.** *Pista: primero da la vuelta a la fracción; después eleva arriba y abajo.*

(1)

2. $-2^4 + (-2)^4$**.** *Pista: ¿en cuál de los dos le afecta la potencia al signo menos?*

(2)

3. $5^0 - 5^{-1}$ **y** $(-1)^7 \cdot 2^{-1}$**.**

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula y da el resultado como número entero o como fracción irreducible:

a) $(-2)^3 - 2^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

b) $\dfrac{-3^2 + (-3)^0}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}$

Resultado para comprobar: a) $-8 - \frac{1}{4} + 8 = -\frac{1}{4}$ b) $\dfrac{-9+1}{\frac{2}{3}} = -12$

FICHA 11

Propiedades de las potencias con números

Vídeo: «Propiedades de las potencias. Ejercicios resueltos paso a paso» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 108

Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica usando las propiedades de las potencias:

$$\text{a)}\ \frac{6^2 \cdot 5^2}{2^2} \qquad \text{b)}\ \frac{27^2 \cdot 3^{-4}}{9^3} \qquad \text{c)}\ \frac{6^3 \cdot 3^{-2}}{2^2 \cdot 9}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Descomponer en factores primos.** Para escribir todas las bases como productos de primos cuando no tienen ni la misma base ni el mismo exponente.

Vídeo del ejercicio «Propiedades de las potencias. Ejercicios resueltos paso a paso» (desde el minuto 7:16)
todosobresaliente.com/v/numeros-11

Repaso: Descomponer en factores primos

Solución

Las propiedades que vamos a usar.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Las dos últimas se pueden usar en los dos sentidos: para quitar el paréntesis o para ponerlo.

a) Mismo exponente: juntamos las bases. No tenemos la misma base (6, 5 y 2), así que no podemos sumar exponentes. Pero los tres están elevados al cuadrado: podemos meterlos en un paréntesis.

$$\frac{6^2 \cdot 5^2}{2^2} = \frac{(6 \cdot 5)^2}{2^2} = \frac{30^2}{2^2} = \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 15^2$$

b) Ni la misma base ni el mismo exponente: factores primos. Descomponemos: $27 = 3^3$ y $9 = 3^2$. Así todo queda en base 3. Con la potencia de una potencia se multiplican los exponentes:

$$\frac{27^2 \cdot 3^{-4}}{9^3} = \frac{(3^3)^2 \cdot 3^{-4}}{(3^2)^3} = \frac{3^6 \cdot 3^{-4}}{3^6}$$

Los exponentes de arriba se suman y los de abajo se restan:

$$3^{6-4-6} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4}$$

Un exponente negativo no se deja en el resultado: se pasa abajo.

c) Con dos primos distintos. $6 = 2\cdot 3$ y $9 = 3^2$. Quitamos el paréntesis elevando cada factor:

$$\frac{6^3 \cdot 3^{-2}}{2^2 \cdot 9} = \frac{(2\cdot 3)^3 \cdot 3^{-2}}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^{-2}}{2^2 \cdot 3^2}$$

Base 2: arriba 3, abajo 2 $\Rightarrow 2^{3-2} = 2^1$. Base 3: arriba $3 + (-2)$, abajo 2 $\Rightarrow 3^{3-2-2} = 3^{-1}$.

$$2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica: a) $\dfrac{4^3 \cdot 5^3}{10^3}$ b) $\dfrac{8^2 \cdot 2^{-3}}{4^3}$

1. a) Mismo exponente.

$$\frac{4^3 \cdot 5^3}{10^3} = \left(\frac{4\cdot 5}{10}\right)^{\text{(1)}} = \underline{\quad\text{(2)}\quad}^{\,3} = \underline{\quad\text{(3)}\quad}$$

2. b) Todo en base 2.

$$\frac{8^2 \cdot 2^{-3}}{4^3} = \frac{(2^{\text{(4)}})^2 \cdot 2^{-3}}{(2^2)^3} = \frac{2^{\text{(5)}} \cdot 2^{-3}}{2^6} = 2^{\text{(6)}} = \underline{\quad\text{(7)}\quad}$$

Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica y da el resultado como potencia de exponente positivo o como fracción: a) $\dfrac{25^3 \cdot 5^{-2}}{125^2}$ b) $\dfrac{12^2 \cdot 3^{-1}}{18 \cdot 2^3}$

1. a). *Pista: ¿qué potencia de 5 es 25? ¿Y 125?*

(1)

2. b) Descomposición. *Pista:* $12 = 2^2 \cdot 3$ *y* $18 = 2 \cdot 3^2$.

(2)

3. b) Resultado.

(3)

Ejercicio de examen

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica al máximo y expresa el resultado como fracción irreducible:

$$\frac{9^2 \cdot 4^{-1} \cdot 6^3}{8 \cdot 27^2 \cdot 2^{-3}}$$

Resultado para comprobar: $\dfrac{3^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^3}{2^3 \cdot 3^6 \cdot 2^{-3}} = 2^1 \cdot 3^1 = 6$

FICHA 12

Propiedades de las potencias con letras

Vídeo: «Propiedades de las potencias. Ejercicios resueltos paso a paso» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 108

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica:

$$\frac{x^4\,y^2}{x^{-1}\,y^3} : \frac{x^2}{y^4}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Dividir fracciones.** Para convertir la división de dos fracciones en una sola fracción, multiplicando en cruz.

Vídeo del ejercicio «Propiedades de las potencias. Ejercicios resueltos paso a paso» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/numeros-12

Repaso: Dividir fracciones

Solución

1. Una sola fracción. Lo primero no es una propiedad de las potencias sino de las fracciones: para dividir, multiplicamos en cruz.

$$\frac{x^4\,y^2}{x^{-1}\,y^3} : \frac{x^2}{y^4} = \frac{x^4\,y^2 \cdot y^4}{x^{-1}\,y^3 \cdot x^2}$$

2. Paso a paso: primero los productos. Para multiplicar potencias de igual base se deja la base y se **suman** los exponentes. Arriba: $y^{2+4} = y^6$. Abajo: $x^{-1+2} = x^1$.

$$\frac{x^4\,y^6}{x^1\,y^3}$$

3. Después los cocientes. Para dividir potencias de igual base se **restan** los exponentes:

$$x^{4-1}\,y^{6-3} = x^3\,y^3$$

No queda nada en el denominador. Si hubiera salido un exponente negativo, por ejemplo $x^3\,y^{-3}$, esa potencia en realidad estaría abajo: $\frac{x^3}{y^3}$.

4. Del tirón. Sabiendo que lo de arriba suma y lo de abajo resta (¡cuidado con los signos!):

$$x^{4-(-1)-2}\,y^{2+4-3} = x^{4+1-2}\,y^3 = x^3\,y^3$$

Hay varios caminos; todos valen si se respetan las propiedades.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica: $\dfrac{a^5\,b^{-2}}{a^2\,b}\cdot\dfrac{b^4}{a}$

1. Una sola fracción.

$$\frac{a^5\,b^{-2}\cdot b^4}{a^2\,b\cdot \underline{\quad(1)\quad}}$$

2. Exponentes de la a.

$$a^{5-2-\underline{\quad(2)\quad}} = a^{\underline{\quad(3)\quad}}$$

3. Exponentes de la b.

$$b^{-2+4-\underline{\quad(4)\quad}} = b^{\underline{\quad(5)\quad}} \quad\Rightarrow\quad \text{resultado: } \underline{\quad(6)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica y deja el resultado sin exponentes negativos: $\dfrac{x^{-2}\,y^3}{x^3\,y^{-1}} : \dfrac{y^5}{x^{-4}}$

1. Producto en cruz.

(1)

2. Exponentes de cada letra. *Pista: arriba suman, abajo restan. ¿Qué pasa con x^{-4} al hacer el producto en cruz?*

(2)

3. Resultado sin exponentes negativos.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica y expresa el resultado sin exponentes negativos:

$$\frac{(a^2\,b^{-1})^3\cdot a^{-4}}{(a\,b^2)^{-2}}$$

Resultado para comprobar: $a^4\,b$ $= \dfrac{a^6\,b^{-3}\,a^{-4}}{a^{-2}\,b^{-4}}$

FICHA 13

Escribir números en notación científica

Vídeo: «Potencias, notación científica y radicales» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 109

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Escribe en notación científica: 897 000 000; 567 800 000; 0,000 000 72; 0,000 000 897.
b) Escribe como número decimal: $7{,}32 \cdot 10^5$; $6{,}54 \cdot 10^{-3}$.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Para entender las potencias de 10 con exponente negativo: $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001$.

Vídeo del ejercicio «Potencias, notación científica y radicales» (desde el minuto 12:39)
todosobresaliente.com/v/numeros-13

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

1. Las potencias de 10. La notación científica sirve para escribir números muy grandes o muy pequeños sin llenar una línea de ceros. Una potencia de 10 es una forma corta de escribir un 1 seguido de ceros:

$$10^1 = 10 \qquad 10^2 = 100 \qquad 10^3 = 1000$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \qquad 10^{-2} = 0{,}01 \qquad 10^{-3} = 0{,}001$$

2. La regla: una sola cifra entera. En notación científica, delante de la coma solo puede haber **una cifra** (las unidades), distinta de 0. Multiplicar por 10^n es mover la coma n lugares a la derecha; dividir, a la izquierda.

a) Números grandes. En 897 000 000 ponemos la coma después del 8 y contamos las cifras que quedan detrás: 8.

$$897\,000\,000 = 8{,}97 \cdot 10^8 \qquad 567\,800\,000 = 5{,}678 \cdot 10^8$$

No vale $56{,}78 \cdot 10^7$: el número sería el mismo, pero no está en notación científica (tiene decenas).

a) Números pequeños. Ponemos la coma después de la primera cifra distinta de cero y contamos cuántos lugares se ha movido la coma. El exponente es negativo:

$$0{,}000\,000\,72 = 7{,}2 \cdot 10^{-7} \qquad 0{,}000\,000\,897 = 8{,}97 \cdot 10^{-7}$$

$7{,}2 \cdot 10^{-7}$ quiere decir: «7,2 con la coma movida 7 lugares a la izquierda».

b) De notación científica a decimal. $7{,}32 \cdot 10^5$: movemos la coma 5 lugares a la derecha. Las dos primeras ya son cifras (3 y 2); añadimos tres ceros:

$$7{,}32 \cdot 10^5 = 732\,000$$

$6{,}54 \cdot 10^{-3}$: movemos la coma 3 lugares a la izquierda (el 6 y dos ceros nuevos) y ponemos el 0 de las unidades:

$$6{,}54 \cdot 10^{-3} = 0{,}006\,54$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe en notación científica 45 000 000 y 0,000 38, y como número decimal $2{,}1 \cdot 10^4$.

1. Número grande.

$$45\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^{\,(1)\quad}$$

2. Número pequeño.

$$0{,}000\,38 = \underline{\quad(2)\quad} \cdot 10^{\,(3)\quad}$$

3. A número decimal.

$$2{,}1 \cdot 10^4 = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. La distancia de la Tierra al Sol es de unos 149 600 000 km y el diámetro de un glóbulo rojo mide 0,000 007 5 m. Escríbelos en notación científica. Escribe también como decimal $3{,}05 \cdot 10^{-6}$.

1. Distancia Tierra-Sol.

(1)

2. Glóbulo rojo. *Pista: ¿cuántos lugares mueves la coma hasta dejar el 7 delante?*

(2)

3. $3{,}05 \cdot 10^{-6}$**.**

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Ordena de menor a mayor: $3{,}2 \cdot 10^{-4}$; $0{,}003$; $9{,}9 \cdot 10^{-5}$; $2 \cdot 10^{-3}$.
b) Un año luz son unos $9\,460\,000\,000\,000$ km. Escríbelo en notación científica.
c) ¿Está $45{,}3 \cdot 10^{6}$ en notación científica? Si no lo está, escríbelo correctamente.

Resultado para comprobar: a) $9{,}9 \cdot 10^{-5} < 3{,}2 \cdot 10^{-4} < 2 \cdot 10^{-3} < 0{,}003$ b) $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km c) No: $4{,}53 \cdot 10^{7}$

FICHA 14

Multiplicar y dividir en notación científica

Vídeo: «Potencias, notación científica y radicales» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 109

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y da el resultado en notación científica:

$$\text{a) } (3{,}5 \cdot 10^5) \cdot (4{,}2 \cdot 10^3) \qquad \text{b) } (8 \cdot 10^3) : (2 \cdot 10^5)$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Para multiplicar (sumar exponentes) y dividir (restar exponentes) las potencias de 10.

Vídeo del ejercicio «Potencias, notación científica y radicales» (desde el minuto 21:23)
todosobresaliente.com/v/numeros-14

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

a) Multiplicar. Se multiplican los números por un lado y las potencias de 10 por otro (sumando los exponentes):

$$(3{,}5 \cdot 4{,}2) \cdot (10^5 \cdot 10^3) = 14{,}7 \cdot 10^8$$

a) ¡Cuidado! Hay que dejarlo en notación científica. 14,7 tiene dos cifras enteras. Lo pasamos a 1,47: hemos movido la coma un lugar a la izquierda, es decir, hemos **dividido** entre 10. Para que el número no cambie, en la potencia hay que **multiplicar** por 10:

$$14{,}7 \cdot 10^8 = 1{,}47 \cdot 10^9$$

b) Dividir. Se dividen los números y se dividen las potencias de 10 (restando los exponentes):

$$\frac{8}{2} \cdot \frac{10^3}{10^5} = 4 \cdot 10^{3-5} = 4 \cdot 10^{-2}$$

Este ya está en notación científica. Si hubiera salido 40 o 0,4, habría que corregirlo como en el apartado a).

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y da el resultado en notación científica: a) $(2{,}5\cdot10^{4})\cdot(6\cdot10^{2})$ b) $(9\cdot10^{-2}):(3\cdot10^{4})$

1. a) Multiplicamos.

$$(2{,}5\cdot 6)\cdot 10^{4+2} = \underline{\ (1)\ }\cdot 10^{6}$$

2. a) En notación científica.

$$15\cdot 10^{6} = 1{,}5\cdot 10^{\underline{\ (2)\ }}$$

3. b) Dividimos.

$$\frac{9}{3}\cdot 10^{-2-\underline{\ (3)\ }} = \underline{\ (4)\ }$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y da el resultado en notación científica: a) $(4\cdot10^{-3})\cdot(5{,}5\cdot10^{-6})$ b) $(1{,}2\cdot10^{5}):(4\cdot10^{-3})$

1. a). *Pista: suma los exponentes con su signo y revisa cuántas cifras enteras tiene el resultado.*

(1)

2. b). *Pista: restar un exponente negativo es sumar.*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. La masa de un átomo de hidrógeno es $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) ¿Cuál es la masa de $6 \cdot 10^{23}$ átomos de hidrógeno? Da el resultado en notación científica.

b) ¿Cuántos átomos de hidrógeno hay en 5 kg de hidrógeno?

Resultado para comprobar: a) $10{,}02 \cdot 10^{-4} = 1{,}002 \cdot 10^{-3}$ kg b) $\frac{5}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} \approx 2{,}99 \cdot 10^{27}$ átomos

FICHA 15

Sumar y restar en notación científica

Vídeo: «Potencias, notación científica y radicales» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 109

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y da el resultado en notación científica:

a) $3{,}2 \cdot 10^3 + 4{,}1 \cdot 10^3$ b) $5{,}4 \cdot 10^5 + 3{,}2 \cdot 10^6$ c) $3{,}2 \cdot 10^{-5} - 2{,}1 \cdot 10^{-7}$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Propiedades de las potencias.** Para cambiar una potencia de 10 por otra sin que cambie el número.

Vídeo del ejercicio «Potencias, notación científica y radicales» (desde el minuto 25:43)
todosobresaliente.com/v/numeros-15

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

a) Misma potencia de 10: el caso fácil. Es como sacar factor común: se suman (o restan) los números y se deja la potencia de 10.

$$(3{,}2 + 4{,}1) \cdot 10^3 = 7{,}3 \cdot 10^3$$

b) Distinto exponente: primero los igualamos. No podemos sumar 10^5 con 10^6 directamente. Pasamos $3{,}2 \cdot 10^6$ a 10^5: en la potencia hemos dividido entre 10, así que en el número multiplicamos por 10:

$$3{,}2 \cdot 10^6 = 32 \cdot 10^5 \quad \Rightarrow \quad 5{,}4 \cdot 10^5 + 32 \cdot 10^5 = 37{,}4 \cdot 10^5 = 3{,}74 \cdot 10^6$$

Al final hay que volver a dejarlo en notación científica.

b) La forma más rápida. Es mejor pasar el exponente pequeño al grande: $5{,}4 \cdot 10^5 = 0{,}54 \cdot 10^6$, y entonces

$$0{,}54 \cdot 10^6 + 3{,}2 \cdot 10^6 = 3{,}74 \cdot 10^6$$

sale directamente en notación científica.

c) Con exponentes negativos. ¿Qué es mayor, 10^{-5} o 10^{-7}? Cuidado: 10^{-7} es más pequeño. Pasamos $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ a 10^{-7}: la potencia se ha dividido entre 10^2, así que el número se multiplica por 100:

$$320 \cdot 10^{-7} - 2{,}1 \cdot 10^{-7} = 317{,}9 \cdot 10^{-7}$$

Lo dejamos en notación científica: $317{,}9 \to 3{,}179$ es dividir entre 100, así que la potencia se multiplica por 100 ($-7 + 2 = -5$):

$$317{,}9 \cdot 10^{-7} = 3{,}179 \cdot 10^{-5}$$

Si al principio hubiéramos pasado 10^{-7} a 10^{-5} ($2{,}1 \cdot 10^{-7} = 0{,}021 \cdot 10^{-5}$), habría salido directamente: $3{,}2 - 0{,}021 = 3{,}179$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y da el resultado en notación científica: a) $6{,}3\cdot10^4-2{,}1\cdot10^4$ b) $2{,}5\cdot10^7+4\cdot10^6$

1. a) Misma potencia.

$$(6{,}3-2{,}1)\cdot10^4=\underline{\quad(1)\quad}$$

2. b) Pasamos $4\cdot10^6$ **a** 10^7**.**

$$4\cdot10^6=\underline{\quad(2)\quad}\cdot10^7$$

3. b) Sumamos.

$$(2{,}5+\underline{\quad(3)\quad})\cdot10^7=\underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y da el resultado en notación científica: a) $7{,}5\cdot10^{-3}+5\cdot10^{-4}$ b) $1{,}2\cdot10^5-8\cdot10^3$

1. a). *Pista: ¿cuál de las dos potencias es mayor? Pasa la pequeña a la grande.*

(1)

2. b).

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula y da el resultado en notación científica:

$$\frac{(2{,}4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4) \cdot (5 \cdot 10^{-3})}{3 \cdot 10^{-2}}$$

Resultado para comprobar: Numerador: $3 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 1{,}5 \cdot 10^3$, resultado: $5 \cdot 10^4$

BLOQUE 2

Radicales

FICHA 16

Extraer factores de un radical

Vídeo: «Potencias, notación científica y radicales» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 109

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Extrae todos los factores posibles de estos radicales:

$$\text{a) } \sqrt{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7} \qquad \text{b) } \sqrt[3]{2^2 \cdot 5^5 \cdot 7^6}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Para partir una potencia en dos: $2^3 = 2^2 \cdot 2$, $5^5 = 5^3 \cdot 5^2$.
- **Descomponer en factores primos.** Para escribir el radicando como producto de primos cuando venga dado como un número.

Vídeo del ejercicio «Potencias, notación científica y radicales» (desde el minuto 36:42)
todosobresaliente.com/v/numeros-16

Repaso: Propiedades de las potencias

Repaso: Descomponer en factores primos

Solución

1. La idea: el exponente cancela la raíz. Si no se escribe el índice, la raíz es cuadrada (índice 2). La raíz cuadrada de algo al cuadrado es ese algo: $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$, $\sqrt{6^2} = 6$. Igual, la raíz cúbica cancela un cubo: $\sqrt[3]{8^3} = 8$. Eso es lo que buscamos: factores elevados al índice, que salen fuera sin su exponente.

2. a) Raíz cuadrada. El 5^2 sale como 5. El 2^3 no es un cuadrado, pero se puede partir: $2^3 = 2^2 \cdot 2$, y ese 2^2 también sale.

$$\sqrt{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = 5 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 7} = 5 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 7} = 10\sqrt{14}$$

3. b) Raíz cúbica. Ahora salen los factores al cubo (o con exponente mayor, partiéndolo). El 2^2 no tiene suficientes doses: se queda dentro. Partimos los otros:

$$5^5 = 5^3 \cdot 5^2 \qquad 7^6 = 7^3 \cdot 7^3$$

Sale un 5 y salen dos sietes; dentro quedan 2^2 y 5^2:

$$\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 7^3} = 5 \cdot 7 \cdot 7\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2} = 245\sqrt[3]{100}$$

$\sqrt[3]{100}$ no es exacta ($4^3 = 64$ y $5^3 = 125$), así que el resultado se deja así.
(En el vídeo el profesor olvida añadir el cubo en la raíz.)

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Extrae factores: a) $\sqrt{3^5 \cdot 2}$ b) $\sqrt[3]{2^4 \cdot 5^3}$

1. a) Partimos 3^5 en cuadrados.

$$3^5 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot \underline{\ (1)\ } \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3^5 \cdot 2} = 3 \cdot 3 \sqrt{\underline{\ (2)\ }} = \underline{\ (3)\ } \sqrt{6}$$

2. b) Partimos 2^4 en cubos.

$$2^4 = 2^3 \cdot \underline{\ (4)\ } \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{2^4 \cdot 5^3} = 2 \cdot \underline{\ (5)\ } \sqrt[3]{2} = \underline{\ (6)\ } \sqrt[3]{2}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Extrae factores: a) $\sqrt{72}$ b) $\sqrt[3]{3^7 \cdot 2^5}$

1. a) Descomponemos 72. *Pista: empieza por los factores primos.*

(1)

2. a) Extraemos.

(2)

3. b). *Pista: ¿cuántos cubos caben en 3^7? ¿Y en 2^5?*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Extrae factores y simplifica: a) $\sqrt{300}$ b) $\sqrt[3]{-54}$ c) $\sqrt{a^5\,b^4\,c}$ d) $\sqrt[4]{2^9 \cdot 3^4}$

Resultado para comprobar: a) $10\sqrt{3}$ b) $-3\sqrt[3]{2}$ c) $a^2\,b^2\sqrt{a\,c}$ d) $12\sqrt[4]{2}$

FICHA 17

Introducir factores en un radical

Vídeo: «Potencias, notación científica y radicales» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 110

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Introduce dentro de la raíz todos los factores:

$$2^3 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Propiedades de las potencias.** Para la potencia de una potencia ($(2^3)^2 = 2^6$) y para juntar potencias de igual base.

Vídeo del ejercicio «Potencias, notación científica y radicales» (desde el minuto 42:05) todosobresaliente.com/v/numeros-17

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

1. La idea: lo contrario que al extraer. Al sacar un factor de una raíz cuadrada perdía el cuadrado. Al meterlo, **se lo ponemos**: un factor entra en la raíz elevado al índice (al cuadrado en una raíz cuadrada, al cubo en una cúbica...).

2. Paso a paso. Metemos el 3, después el 5 y por último el 2^3, que ya tiene exponente: entra como $(2^3)^2$.

$$2^3 \cdot 5\sqrt{3^2 \cdot 2 \cdot 3} = 2^3\sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{(2^3)^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3}$$

3. Simplificamos.

$$\sqrt{2^6 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{2^7 \cdot 5^2 \cdot 3^3}$$

4. Del tirón. Sabiendo cómo se hace: el exponente de cada factor de fuera se multiplica por el índice y se suma al que ya hay dentro. 2: $3 \cdot 2 + 1 = 7$; 5: $1 \cdot 2 = 2$; 3: $1 \cdot 2 + 1 = 3$. Sale lo mismo: $\sqrt{2^7 \cdot 5^2 \cdot 3^3}$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Introduce los factores dentro de la raíz: a) $3\sqrt{2}$ b) $2^2 \cdot 5\sqrt{5}$

1. a).

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^{\underline{\quad(1)\quad}} \cdot 2} = \sqrt{\underline{\quad(2)\quad}}$$

2. b).

$$2^2 \cdot 5\sqrt{5} = \sqrt{(2^2)^2 \cdot 5^{\underline{\quad(3)\quad}} \cdot 5} = \sqrt{2^{\underline{\quad(4)\quad}} \cdot 5^{\underline{\quad(5)\quad}}}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Introduce los factores dentro de la raíz: a) $2 \cdot 3^2 \sqrt[3]{2 \cdot 3}$ b) $a^2\, b \sqrt{a\, b^3}$

1. a). *Pista: es una raíz cúbica: ¿a qué se elevan los factores al entrar?*

(1)

2. b).

(2)

◯ Ejercicio de examen

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Introduce los factores y ordena de menor a mayor, sin calculadora: $3\sqrt{5},\ 2\sqrt{11},\ 4\sqrt{3}$.

b) Introduce los factores: $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{27}{8}}$. Simplifica el resultado.

Resultado para comprobar: a) $\sqrt{45},\ \sqrt{44},\ \sqrt{48}$: $2\sqrt{11} < 3\sqrt{5} < 4\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{4 \cdot 27}{9 \cdot 8}} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$

FICHA 18

Sumar, multiplicar y dividir radicales

Vídeo: «Potencias, notación científica y radicales» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 110

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica cuando se pueda:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$ e) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Extraer factores de un radical.** Para sumar radicales que a primera vista no son iguales (en los guiados y en el examen): al extraer factores aparecen radicales semejantes.

Vídeo del ejercicio «Potencias, notación científica y radicales» (desde el minuto 34:00)
todosobresaliente.com/v/numeros-18

Repaso: Extraer factores de un radical

Solución

a) Radicales distintos: no se pueden sumar. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ no se puede simplificar más. Es como sumar peras con manzanas: tenemos 3 peras y 5 manzanas, y ya está.

b) El mismo radical: se suman los números de delante. Dos manzanas más cinco manzanas menos tres manzanas son cuatro manzanas:

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=(2+5-3)\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

c) Las peras con las peras. Juntamos $\sqrt{3}$ con $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ con $\sqrt{2}$, igual que $2x-x$ y $5y+2y$:

$$(2\sqrt{3}-\sqrt{3})+(5\sqrt{2}+2\sqrt{2})=\sqrt{3}+7\sqrt{2}$$

y ya no se puede simplificar más.

d) y e) Multiplicar y dividir con el mismo índice. Es muy fácil: la raíz de un producto es el producto de las raíces (y lo mismo con el cociente). Se juntan en una sola raíz:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{2\cdot 5}=\sqrt{10} \qquad \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$$

Con índices distintos (por ejemplo $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$) también se puede, pero hay que poner antes el mismo índice: lo verás en la ficha siguiente.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica: a) $7\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5}$ b) $4\sqrt{2} - \sqrt{7} + 3\sqrt{7} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$

1. a).

$$(7 - 2 + \underline{\quad(1)\quad})\sqrt{5} = \underline{\quad(2)\quad}$$

2. b).

$$(4 - 1)\sqrt{2} + (\underline{\quad(3)\quad})\sqrt{7} = \underline{\qquad(4)\qquad}$$

3. c) Juntamos y extraemos.

$$\sqrt{6 \cdot 3} = \sqrt{\underline{\quad(5)\quad}} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \underline{\quad(6)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica: a) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

1. a) Extraemos factores de cada radical. *Pista:* $12 = 2^2 \cdot 3$ *y* $27 = 3^2 \cdot 3$.

(1)

2. a) Sumamos los semejantes.

(2)

3. b).

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Simplifica:

a) $3\sqrt{20} - \sqrt{45} + 2\sqrt{80}$
b) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{8} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$
c) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Resultado para comprobar: a) $6\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = 11\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$ c) $3 - 2 = 1$

FICHA 19

Multiplicar radicales de distinto índice

Vídeo: «Multiplicar radicales con distinto índice. Aprende Matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 110

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Multiplica y simplifica:

$$\text{a) } \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{3} \qquad \text{b) } \sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{2^3} \qquad \text{c) } \sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[4]{3^2}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Mínimo común múltiplo.** Para calcular el índice común: m.c.m.(3, 5) = 15.
- **Propiedades de las potencias.** Para juntar potencias de igual base dentro de la raíz.

Vídeo del ejercicio «Multiplicar radicales con distinto índice» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/numeros-19

Repaso: Mínimo común múltiplo

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

a) Reducir a índice común. No se pueden multiplicar directamente: una raíz tiene índice 3 y la otra 5. Hay que escribirlas con el mismo índice, que es el mínimo común múltiplo de los índices: m.c.m.(3, 5) = 15.

Para entender por qué, las pasamos a potencias de exponente fraccionario (el exponente arriba y el índice abajo):

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = 2^{5/15} \qquad \sqrt[5]{3} = 3^{1/5} = 3^{3/15}$$

Es lo mismo que hacemos con las fracciones al buscar el común denominador. Volviendo a raíces:

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{2^5}\cdot\sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{2^5\cdot 3^3}$$

Directamente. Sin pasar a exponentes: índice común 15; para cada raíz, se divide 15 entre su índice y se multiplica por el exponente de dentro: $15:3\cdot 1 = 5$ y $15:5\cdot 1 = 3$.

b). La raíz cuadrada tiene índice 2. m.c.m.(3, 2) = 6: $6:3\cdot 2 = 4$ y $6:2\cdot 3 = 9$.

$$\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt{2^3} = \sqrt[6]{5^4\cdot 2^9} = \sqrt[6]{320\,000}$$

En un examen es más correcto dejarlo con potencias; calcular el número solo es usar la calculadora.

c) Misma base: sumamos exponentes y extraemos. m.c.m.(5, 4) = 20: $20:5\cdot 3 = 12$ y $20:4\cdot 2 = 10$.

$$\sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[4]{3^2} = \sqrt[20]{3^{12}\cdot 3^{10}} = \sqrt[20]{3^{22}} = \sqrt[20]{3^{20}\cdot 3^2} = 3\sqrt[20]{3^2}$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Multiplica: a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{5}$

1. a) Índice común. m.c.m.(2, 3) = (1)

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^{(2)}\cdot 3^{(3)}} = \sqrt[6]{(10)}$$

2. b) Índice común y exponentes. m.c.m.(4, 6) = (14)

$$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{5^3\cdot 5^{(15)}} = \sqrt[12]{5^{(19)}}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Multiplica y simplifica: a) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}$ b) $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}$

1. a). *Pista: escribe* $4 = 2^2$ *antes de reducir a índice común.*

(1)

2. b). *Pista: al final, ¿puedes extraer alguna* a*?*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Opera y simplifica todo lo posible:

$$\text{a) } \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3} \qquad \text{b) } \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$$

Resultado para comprobar: a) $\sqrt[6]{3^3\cdot 3^4\cdot 3}=\sqrt[6]{3^8}=3\sqrt[6]{9}$ (o $3\sqrt[3]{3}$) b) $\sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}}=\sqrt[6]{2}$

FICHA 20

Racionalizar: un radical en el denominador

Vídeo: «Racionalización de radicales. Racionalizar.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 111

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Racionaliza:

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \text{b) } \frac{5}{\sqrt[3]{2}} \qquad \text{c) } \frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Para saber qué exponente falta: $2 \cdot 2^2 = 2^3$.

Vídeo del ejercicio «Racionalización de radicales. Racionalizar.» (desde el minuto 0:52) todosobresaliente.com/v/numeros-20

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

1. ¿Qué es racionalizar?. Es transformar una fracción con raíces en el denominador en otra que valga lo mismo pero sin raíces abajo. Es muy útil, por ejemplo, para sumar fracciones: buscar el común denominador de $\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$ es complicado.

a) Raíz cuadrada. Multiplicamos abajo por $\sqrt{2}$: así queda $\sqrt{2^2}$ y el cuadrado se va con la raíz. Pero no podemos multiplicar por lo que queramos: para no cambiar el valor hay que multiplicar por 1, así que multiplicamos **arriba y abajo** por lo mismo.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ahora la raíz está arriba, donde no estorba.

b) Raíz cúbica. Ahora necesitamos un cubo dentro de la raíz. Abajo hay 2^1: nos faltan dos doses. Multiplicamos arriba y abajo por $\sqrt[3]{2^2}$ (mismo índice: se juntan y se suman los exponentes):

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$$

c) Raíz quinta. Lo de arriba da igual. Dentro hay 3^2 y queremos 3^5: faltan 3.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[5]{3^3}} = \frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2\sqrt[5]{27}}{3}$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Racionaliza: a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

1. a).

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \text{(1)}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\text{(2)}} = \text{(3)}$$

2. b) Faltan dos cincos.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^{\text{(5)}}}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{\text{(9)}}}{5}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Racionaliza y simplifica: a) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{2^3}}$

1. a). *Pista: el 3 de abajo no molesta: solo hay que quitar $\sqrt{5}$.*

(1)

2. b). *Pista: ¿qué exponente le falta al 2 para llegar a 2^4?*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Racionaliza y simplifica: a) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{12}{\sqrt{18}}$ c) $\dfrac{9}{\sqrt[3]{3}}$

Resultado para comprobar: a) 1 b) $\dfrac{12}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt[3]{9}$

FICHA 21

Racionalizar multiplicando por el conjugado

Vídeo: «Racionalización de radicales. Racionalizar.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 111

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Racionaliza:

$$\text{a)}\ \frac{1}{\sqrt{3}+2} \qquad \text{b)}\ \frac{8}{1-\sqrt{2}}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ **Identidades notables.** Para la suma por diferencia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Vídeo del ejercicio «Racionalización de radicales. Racionalizar.» (desde el minuto 6:20) todosobresaliente.com/v/numeros-21

Repaso: Identidades notables

Solución

1. El truco: el conjugado. Ahora abajo no hay un radical solo, sino una suma o una resta con un radical. Se multiplica arriba y abajo por el **conjugado**: la misma expresión con el signo del medio cambiado. El conjugado de $\sqrt{3}+2$ es $\sqrt{3}-2$.

¿Por qué? Porque así abajo tenemos una suma por una diferencia, que es una identidad notable: **diferencia de cuadrados**. Y al elevar al cuadrado, la raíz desaparece.

a).

$$\frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{1\cdot(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3})^2-2^2} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = \frac{\sqrt{3}-2}{-1}$$

Se puede simplificar un poco más dividiendo entre -1, que cambia todos los signos de arriba: $2-\sqrt{3}$.

b). Da igual que la raíz vaya en segundo lugar. Es una resta: multiplicamos por $1+\sqrt{2}$.

$$\frac{8}{1-\sqrt{2}} = \frac{8\,(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{8+8\sqrt{2}}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{8+8\sqrt{2}}{1-2}$$

$$= \frac{8+8\sqrt{2}}{-1} = -8-8\sqrt{2}$$

Casualmente, en los dos ha salido -1 abajo; no siempre es así.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Racionaliza: $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

1. Conjugado. Multiplicamos arriba y abajo por ___(1)___.

2. Diferencia de cuadrados abajo.

$$(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5})^2 - 1^2 = \text{___(2)___}$$

3. Resultado.

$$\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \text{___(3)___}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Racionaliza y simplifica: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

1. Conjugado y denominador.

(1)

2. Numerador. *Pista:* $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{12}$*; ¿se puede extraer algo?*

(2)

3. Simplificamos.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Racionaliza y simplifica: a) $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ c) Comprueba que $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ es igual a $2\sqrt{2}$.

Resultado para comprobar: a) $6-3\sqrt{3}$ b) $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ c) $(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)=2\sqrt{2}$

BLOQUE 3

Proporcionalidad y porcentajes

FICHA 22

Regla de tres simple directa

Vídeo: «Regla de tres simple, directa e inversa. Proporcionalidad» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 111

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Si 12 kg de tomates cuestan 7 €, ¿cuánto costarán 18 kg?
b) He comprado 3,5 kg de carne por 7,5 €. Si ahora quiero gastar 10 €, ¿cuánta carne podré comprar?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar la x de la proporción escrita como igualdad de fracciones.

Vídeo del ejercicio «Regla de tres simple, directa e inversa» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/numeros-22

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

1. ¿Cuándo es una regla de tres directa?. Cuando hay dos magnitudes en proporción directa: si una se multiplica por 2, la otra también; si una se divide entre 2, la otra también. Si compro el doble de tomates, pago el doble de dinero.

a) Primera forma: las diagonales. Escribimos los datos en columnas, cada magnitud con la suya:

$$\begin{array}{rcl} 12\text{ kg} & \longrightarrow & 7\text{ €} \\ 18\text{ kg} & \longrightarrow & x \end{array}$$

Se multiplica la diagonal que no tiene la x y se divide entre el número de la diagonal que sí la tiene:

$$x = \frac{18 \cdot 7}{12} = 10{,}5\text{ €}$$

a) Segunda forma: con fracciones. Muchos profesores prefieren escribir la proporción: 12 es a 18 como 7 es a x. Es exactamente la misma cuenta:

$$\frac{12}{18} = \frac{7}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7 \cdot 18}{12} = 10{,}5\text{ €}$$

b) La carne. Más carne, más dinero: es directa. Ahora la incógnita son los kilos.

$$\begin{array}{rcl} 3{,}5\text{ kg} & \longrightarrow & 7{,}5\text{ €} \\ x & \longrightarrow & 10\text{ €} \end{array} \qquad x = \frac{3{,}5 \cdot 10}{7{,}5} = \frac{35}{7{,}5} = 4{,}67\text{ kg}$$

Con un poco más de dinero compro un poco más de carne: el resultado tiene sentido.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un coche gasta 6 litros de gasolina cada 100 km. ¿Cuántos litros gastará en un viaje de 350 km?

1. ¿Directa o inversa?. Más kilómetros, ___(1)___ litros: es ___(2)___.

2. Planteamiento.

$$\begin{aligned} 100\ \text{km} &\longrightarrow 6\ \text{L} \\ 350\ \text{km} &\longrightarrow x \end{aligned}$$

3. Resolución.

$$x = \frac{\text{(3)} \cdot 6}{100} = \text{(4)}\ \text{L}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Una impresora imprime 45 páginas en 3 minutos. ¿Cuántas páginas imprime en un cuarto de hora? ¿Cuánto tarda en imprimir 120 páginas?

1. Páginas en un cuarto de hora. *Pista: pasa el cuarto de hora a minutos antes de plantear la regla de tres.*

(1)

2. Tiempo para 120 páginas.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. En un mapa, 3 cm representan 45 km en la realidad.

a) ¿Qué distancia real hay entre dos ciudades que en el mapa están a 8,2 cm?

b) ¿A cuántos centímetros del mapa equivale un recorrido real de 100 km?

c) ¿Cuál es la escala del mapa (1 : . . .)?

Resultado para comprobar: a) 123 km b) 6,67 cm c) 1 cm son 15 km = 1 500 000 cm; escala 1 : 1 500 000

FICHA 23

Regla de tres simple inversa

Vídeo: «Regla de tres simple, directa e inversa. Proporcionalidad» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 112

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Tres hombres construyen una casa en 20 días. ¿Cuánto tardarían 10 hombres en construir una casa igual?
b) Cinco grifos llenan un depósito en 3 horas. ¿Cuánto tardarán 8 grifos?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para despejar la x de la proporción.

Vídeo del ejercicio «Regla de tres simple, directa e inversa» (desde el minuto 7:41)
todosobresaliente.com/v/numeros-23

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

1. ¿Por qué es inversa?. Cuantos más obreros, menos días tardan: cuando una magnitud sube, la otra baja. Es una proporcionalidad inversa.

a) Primera forma: en horizontal. Planteamos igual que antes, pero ahora multiplicamos **en horizontal** y dividimos entre el que queda:

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ hombres} & \longrightarrow & 20 \text{ días} \\ 10 \text{ hombres} & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{3 \cdot 20}{10} = 6 \text{ días}$$

¿Tiene sentido? Con más del triple de hombres tardan menos de la tercera parte. Si hubiera salido 500 días, algo estaría mal. Siempre hay que comprobar que el resultado tenga sentido.

a) Segunda forma: con fracciones. Las fracciones se escriben igual que en la directa, pero por ser inversa **se le da la vuelta a una**. Mejor a la que tiene la x, para que quede arriba:

$$\frac{3}{10} = \frac{x}{20} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20 \cdot 3}{10} = 6 \text{ días}$$

b) Los grifos. Más grifos, menos tiempo: inversa.

$$\begin{array}{rcl} 5 \text{ grifos} & \longrightarrow & 3 \text{ h} \\ 8 \text{ grifos} & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{5 \cdot 3}{8} = \frac{15}{8} = 1{,}875 \text{ h}$$

Es decir, 1 hora y $0{,}875 \cdot 60 = 52{,}5$ minutos.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un viaje a 80 km/h dura 3 horas. ¿Cuánto duraría a 120 km/h?

1. ¿Directa o inversa?. A más velocidad, ___(1)___ tiempo: es ___(2)___.

2. Multiplicamos en horizontal.

$$x = \frac{80 \cdot \text{(3)}}{\text{(4)}} = \text{(5)}\ \text{h}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Con el pienso que tiene, un granjero puede alimentar a 24 vacas durante 45 días. Si vende 6 vacas, ¿cuántos días le durará el pienso?

1. ¿Cuántas vacas quedan? ¿Directa o inversa?.

(1)

2. Planteamiento y resultado. *Pista: escríbelo también con fracciones, dando la vuelta a la que tiene la x.*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Para embaldosar el suelo de una habitación hacen falta 240 baldosas de 20 cm × 20 cm.

a) ¿Cuántas baldosas de 40 cm × 40 cm harían falta?
b) ¿Es inversa la relación entre el lado de la baldosa y el número de baldosas? Razónalo.

Resultado para comprobar: a) Lo inversamente proporcional es la **superficie** de cada baldosa (400 y 1600 cm^2): $\frac{240 \cdot 400}{1600} = 60$ baldosas b) No: al doblar el lado no se reduce a la mitad sino a la cuarta parte.

FICHA 24

Regla de tres compuesta: directa e inversa

Vídeo: «Regla de tres compuesta, directa, inversa y mixta. Proporcionalidad compuesta.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 112

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) 12 grifos abiertos durante 6 horas gastan 20 € de agua. ¿Cuánto gastarán 7 grifos abiertos durante 10 horas?

b) 5 obreros, trabajando 7 horas al día, levantan un muro en 2 días. ¿Cuánto tardarán 7 obreros trabajando 8 horas al día?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Regla de tres simple.** Para decidir si cada pareja de magnitudes es directa o inversa.
- **Multiplicar fracciones.** Para juntar todas las fracciones en una sola.

Vídeo del ejercicio «Regla de tres compuesta, directa, inversa y mixta» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/numeros-24

Repaso: Regla de tres simple

Repaso: Multiplicar fracciones

Solución

a) Tres magnitudes. Escribimos los datos:

grifos	horas	euros
12	6	20
7	10	x

Hay que ver si la magnitud de la incógnita (euros) es directa o inversa con **cada una** de las otras. Para ello tapamos una y miramos las otras dos (la relación entre grifos y horas no importa):

- Grifos y euros (mismas horas): más grifos, más dinero. **Directa**.
- Horas y euros (mismos grifos): más horas, más dinero. **Directa**.

a) Las fracciones. Primero la que tiene la incógnita; después las demás, multiplicando, tal cual porque son directas:

$$\frac{20}{x} = \frac{12}{7} \cdot \frac{6}{10} = \frac{72}{70} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{20 \cdot 70}{72} = 19{,}44\ €$$

Hay menos grifos, pero más horas: se compensa y se gasta casi lo mismo.

b) Ahora las dos relaciones son inversas.

- Obreros y días: más obreros, menos días. **Inversa**.
- Horas al día y días: más horas cada día, menos días. **Inversa**.

A las inversas se les da la vuelta: en lugar de $\frac{5}{7}$ escribimos $\frac{7}{5}$, y en lugar de $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{7}$.

$$\frac{2}{x} = \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{56}{35} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot 35}{56} = 1{,}25 \text{ días}$$

Un día y cuarto.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. 4 máquinas, funcionando 6 horas, fabrican 1200 piezas. ¿Cuántas piezas fabricarán 3 máquinas funcionando 10 horas?

1. Relaciones. Máquinas y piezas: ___(1)___. Horas y piezas: ___(2)___.

2. Fracciones.

$$\frac{1200}{x} = \frac{4}{\text{(3)}} \cdot \frac{\text{(4)}}{10} = \frac{24}{\text{(5)}}$$

3. Despejamos.

$$x = \frac{1200 \cdot 30}{24} = \text{(6)} \text{ piezas}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. 6 pintores, trabajando 8 horas diarias, pintan un edificio en 10 días. ¿Cuántos días tardarán 4 pintores trabajando 6 horas diarias?

1. Tabla y relaciones. *Pista: tapa una magnitud cada vez y compara la otra con los días.*

(1)

2. Fracciones y resultado.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Para alimentar a 15 caballos durante 20 días se necesitan 1500 kg de pienso.

a) ¿Cuántos kilos se necesitan para 9 caballos durante 30 días?
b) ¿Cuántos días podrán comer 25 caballos con 2000 kg de pienso?

Resultado para comprobar: a) $\frac{1500}{x} = \frac{15}{9} \cdot \frac{20}{30} \Rightarrow x = 1350\,\text{kg}$ b) $\frac{20}{x} = \frac{25}{15} \cdot \frac{1500}{2000} \Rightarrow x = 16\,\text{días}$

FICHA 25

Regla de tres compuesta mixta

Vídeo: «Regla de tres compuesta, directa, inversa y mixta. Proporcionalidad compuesta.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 112

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. 5 obreros, trabajando 7 horas al día, levantan un muro de 10 metros en 2 días. ¿Cuánto tardarán 7 obreros, trabajando 8 horas al día, en levantar un muro de 5 metros?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Regla de tres simple.** Para decidir si cada relación es directa o inversa.

Solución

1. Cuatro magnitudes. Se llama **mixta** porque hay relaciones directas e inversas. Aunque haya cuatro magnitudes, se hace igual.

obreros	horas/día	metros	días
5	7	10	2
7	8	5	x

2. Relación de cada magnitud con los días.

- Obreros: más obreros, menos días. **Inversa**: $\frac{7}{5}$.
- Horas al día: más horas al día, menos días. **Inversa**: $\frac{8}{7}$.
- Metros: más muro, más días. **Directa**: $\frac{10}{5}$, tal cual.

3. Ecuación.

$$\frac{2}{x} = \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{5} = \frac{560}{175} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot 175}{560} = 0{,}625 \text{ días}$$

Tardan poco más de medio día. Tiene sentido: hay más obreros, más horas al día y menos muro.

Vídeo del ejercicio
«Regla de tres compuesta, directa, inversa y mixta» (desde el minuto 9:57)
todosobresaliente.com/v/numeros-25

Repaso: Regla de tres simple

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. 8 operarios, trabajando 6 horas al día, hacen 240 m de zanja en 5 días. ¿Cuántos días tardarán 10 operarios, trabajando 8 horas al día, en hacer 400 m?

1. Relaciones con los días. Operarios: (1). Horas al día: (2). Metros: (3).

2. Fracciones.

$$\frac{5}{x} = \frac{10}{8} \cdot \frac{(4)}{(5)} \cdot \frac{240}{400}$$

3. Resultado.

$$x = \text{(6)}\ \text{días}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. 3 imprentas, trabajando 10 horas diarias, imprimen 9000 libros en 6 días. ¿Cuántas horas diarias tendrán que trabajar 4 imprentas para imprimir 12 000 libros en 5 días?

1. Tabla. *Pista: ahora la incógnita son las horas diarias.*

(1)

2. Relación de cada magnitud con las horas diarias.

(2)

3. Fracciones y resultado.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Una empresa de reparto, con 6 furgonetas que circulan 8 horas al día, reparte 1800 paquetes en 3 días.

a) ¿Cuántos paquetes repartirá en 5 días con 4 furgonetas circulando 9 horas al día?

b) ¿Cuántas furgonetas necesita para repartir 3000 paquetes en 2 días circulando 10 horas al día?

Resultado para comprobar: a) 2250 paquetes b) 12 furgonetas

FICHA 26

El porcentaje de una cantidad

Vídeo: «Porcentaje, tanto por ciento, directo e inverso.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 113

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula: el 20 % de 100; el 15 % de 75; el 5 % de 500; el 85 % de 7500.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Multiplicar fracciones.** Un porcentaje es una fracción de denominador 100: el 20 % de 100 es $\frac{20}{100} \cdot 100$.
- **Regla de tres simple.** Para la segunda forma de calcularlo.

Vídeo del ejercicio «Porcentaje, tanto por ciento, directo e inverso» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/numeros-26

Repaso: Multiplicar fracciones

Repaso: Regla de tres simple

Solución

1. ¿Qué es un porcentaje? Es una fracción de un total: el 100 % es la cantidad entera. El 20 % significa dividir el total en 100 partes y coger 20, es decir, $\frac{20}{100}$.

$$20\,\%\text{ de }100 = \frac{20}{100} \cdot 100 = 20$$

2. El 15 % de 75: tres formas que son la misma cuenta. **Como fracción:** el «de» se cambia por «por»: $\frac{15}{100} \cdot 75 = \frac{15 \cdot 75}{100} = 11{,}25$.

Con una regla de tres: el 100 % son 75; el 15 % es x:

$$\begin{array}{rcl} 100\,\% & \longrightarrow & 75 \\ 15\,\% & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{15 \cdot 75}{100} = 11{,}25$$

Con un decimal: dividir entre 100 es mover la coma dos lugares: el 15 % es multiplicar por 0,15. $0{,}15 \cdot 75 = 11{,}25$.

3. Más ejemplos con el decimal. El 5 % es 0,05 (es una cifra: hay que poner el cero) y el 85 % es 0,85:

$$0{,}05 \cdot 500 = 25 \qquad 0{,}85 \cdot 7500 = 6375$$

Usar la calculadora no tiene nada de malo: las matemáticas consisten en razonar y encontrar la solución, no en hacer cuentas de memoria.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula el 30 % de 240 y el 4 % de 1250.

1. El 30 % de 240.

$$\underline{\quad(1)\quad} \cdot 240 = \underline{\quad(2)\quad}$$

2. El 4 % de 1250. El 4 % en forma decimal es $\underline{\quad(3)\quad}$:

$$0{,}04 \cdot 1250 = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En un instituto de 880 alumnos, el 35 % va al centro andando y el 7,5 % en bici. ¿Cuántos alumnos van de cada forma?

1. Andando.

(1)

2. En bici. *Pista: el 7,5 % en forma decimal es* 0,075.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En unas elecciones votaron 12 500 personas. El partido A obtuvo el 42 % de los votos, el B el 35 % y el resto fueron votos en blanco.

a) ¿Cuántos votos obtuvo cada partido?
b) ¿Qué porcentaje fueron votos en blanco y cuántos votos son?

Resultado para comprobar: a) A: 5250 votos; B: 4375 votos b) 23 %: 2875 votos

FICHA 27

El total y el tanto por ciento

Vídeo: «Porcentaje, tanto por ciento, directo e inverso.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 113

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) El 15 % de una cantidad es 50. ¿Cuál es la cantidad? Haz lo mismo si el 5 % es 100 y si el 50 % es 40.

b) ¿Qué porcentaje de 500 es 20? ¿Qué porcentaje de 5400 es 90? ¿Y de 8250 es 250?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ **Regla de tres simple.** Es la herramienta más cómoda para estos problemas.

Vídeo del ejercicio «Porcentaje, tanto por ciento, directo e inverso» (desde el minuto 7:53) todosobresaliente.com/v/numeros-27

Repaso: Regla de tres simple

Solución

1. Tres cantidades. En un porcentaje intervienen tres cantidades: el tanto por ciento, el total y la parte. En la ficha anterior nos daban el tanto por ciento y el total; ahora nos pueden preguntar cualquiera de las tres. Lo más fácil es una regla de tres, con cuidado de poner los porcentajes debajo de los porcentajes y las cantidades debajo de las cantidades.

a) El total.

$$\begin{array}{rcl} 100\,\% & \longrightarrow & x \\ 15\,\% & \longrightarrow & 50 \end{array} \qquad x = \frac{50 \cdot 100}{15} = 333{,}\overline{3}$$

Que salgan decimales no tiene importancia. Igual con los otros:

$$x = \frac{100 \cdot 100}{5} = 2000 \qquad x = \frac{40 \cdot 100}{50} = 80$$

El último se podía hacer de cabeza: si la mitad es 40, el total es 80.

b) El tanto por ciento. Ahora sabemos el total y la parte; la x va en la columna de los porcentajes:

$$\begin{array}{rcl} 500 & \longrightarrow & 100\,\% \\ 20 & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{20 \cdot 100}{500} = 4\,\%$$

$$x = \frac{90 \cdot 100}{5400} = 1{,}\overline{6}\,\% \qquad x = \frac{250 \cdot 100}{8250} = 3{,}\overline{03}\,\%$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. a) El 25 % de una cantidad es 60. ¿Cuál es la cantidad? b) ¿Qué porcentaje de 320 es 48?

1. a) El total.

$$x = \frac{60 \cdot \text{(1)}}{25} = \text{(2)}$$

2. b) El tanto por ciento.

$$x = \frac{48 \cdot 100}{\text{(3)}} = \text{(4)}\ \%$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En un examen han aprobado 21 alumnos, que son el 84 % de la clase. ¿Cuántos alumnos hay en la clase? ¿Qué porcentaje ha suspendido?

1. Total de alumnos.

(1)

2. Porcentaje de suspensos. *Pista: hay dos caminos: restar porcentajes o calcular cuántos han suspendido.*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. De los 1250 árboles de un parque, 300 son pinos y el 36 % son encinas. El resto son olivos.

a) ¿Qué porcentaje de los árboles son pinos?
b) ¿Cuántos olivos hay y qué porcentaje representan?
c) Si el número de encinas es el 60 % del de un parque vecino, ¿cuántas encinas tiene el parque vecino?

Resultado para comprobar: a) 24 % b) 500 olivos, 40 % c) 450 encinas son el 60 %: 750 encinas

FICHA 28

Descuentos porcentuales inversos

Vídeo: «Aumentos y descuentos porcentuales inversos» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 113

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Maika ha comprado en las rebajas un jersey con un 15 % de descuento y ha pagado 40 €. ¿Cuánto valía antes de la rebaja?

b) Una prenda que costaba 120 € se le ha quedado en 75 €. ¿Qué porcentaje de descuento le han hecho?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Aumentos y descuentos porcentuales.** Para el caso directo: si te rebajan un 15 %, pagas el 85 %.
- **Regla de tres simple.** Para plantear el problema inverso.

Vídeo del ejercicio «Aumentos y descuentos porcentuales inversos» (desde el minuto 0:30) todosobresaliente.com/v/numeros-28

Repaso: Aumentos y descuentos porcentuales

Repaso: Regla de tres simple

Solución

1. Directo e inverso. El problema directo sería: algo vale 80 € y tiene un 10 % de descuento, ¿cuánto pago? En el inverso nos dan lo que se ha pagado y hay que volver hacia atrás.

a) El precio inicial. El precio inicial es el 100 %, lo que no sabemos. Si me descuentan un 15 %, pago el 100 − 15 = 85 %, y eso son 40 €:

$$\begin{array}{rcl} 100\,\% & \longrightarrow & x \\ 85\,\% & \longrightarrow & 40\ € \end{array} \qquad x = \frac{40 \cdot 100}{85} = 47{,}06\ €$$

b) El porcentaje de descuento. El 100 % es el precio original, 120 €. ¿Qué porcentaje es lo que he pagado?

$$\begin{array}{rcl} 120\ € & \longrightarrow & 100\,\% \\ 75\ € & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{75 \cdot 100}{120} = 62{,}5\,\%$$

¡Cuidado! Eso es lo que he **pagado**, no el descuento. El descuento es la diferencia:

$$100\,\% - 62{,}5\,\% = 37{,}5\,\%$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Tras un descuento del 20 %, unas zapatillas cuestan 56 €. ¿Cuánto costaban antes?

1. ¿Qué porcentaje pago?.

$$100\,\% - 20\,\% = \underline{\quad (1) \quad}$$

2. Regla de tres.

$$x = \frac{56 \cdot 100}{\underline{(2)}} = \underline{(3)}\ €$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un móvil costaba 350 € y en el Black Friday lo venden por 294 €. ¿Qué descuento le han aplicado?

1. Porcentaje que se paga.

(1)

2. Porcentaje de descuento. *Pista: ¿lo que has calculado es lo que se paga o lo que se descuenta?*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Una tienda rebaja un abrigo un 30 % y, unas semanas después, rebaja el nuevo precio otro 10 %. Al final el abrigo cuesta 94,50 €.

a) ¿Cuánto costaba antes de la segunda rebaja?
b) ¿Cuánto costaba al principio?
c) ¿Qué descuento total le han hecho? ¿Es un 40 %?

Resultado para comprobar: a) $\frac{94{,}5 \cdot 100}{90} = 105\,€$ b) $\frac{105 \cdot 100}{70} = 150\,€$ c) Paga el 63 %: descuento del 37 %, no del 40 %

FICHA 29

Aumentos porcentuales inversos

Vídeo: «Aumentos y descuentos porcentuales inversos» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 114

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Maika invirtió un dinero en bolsa que le ha rentado un 10 %. Ahora tiene 1200 €. ¿Cuánto invirtió?
b) Si invirtió 2000 € y al final del año tiene 2500 €, ¿qué porcentaje ha ganado?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Aumentos y descuentos porcentuales.** Para el caso directo: si algo sube un 10 %, pasa a ser el 110 %.
- **Regla de tres simple.** Para plantear el problema inverso.

Vídeo del ejercicio «Aumentos y descuentos porcentuales inversos» (desde el minuto 7:08)
todosobresaliente.com/v/numeros-29

Repaso: Aumentos y descuentos porcentuales

Repaso: Regla de tres simple

Solución

a) La cantidad inicial. Lo que había al principio es el 100 %. Después de ganar un 10 % tiene el 100 + 10 = 110 %, que son 1200 €:

$$\begin{array}{ccc} 100\,\% & \longrightarrow & x \\ 110\,\% & \longrightarrow & 1200\ € \end{array} \qquad x = \frac{1200 \cdot 100}{110} = 1090{,}91\ €$$

El detalle está en que al final hay **más** de lo que había: el 100 % más el aumento.

b) El porcentaje de aumento. El 100 % son los 2000 € invertidos. ¿Qué porcentaje son los 2500 €?

$$\begin{array}{ccc} 2000\ € & \longrightarrow & 100\,\% \\ 2500\ € & \longrightarrow & x \end{array} \qquad x = \frac{2500 \cdot 100}{2000} = 125\,\%$$

Al principio tenía el 100 % y ahora el 125 %: ha ganado un 125 − 100 = 25 %.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. El precio de un billete de tren ha subido un 8 % y ahora cuesta 43,20 €. ¿Cuánto costaba antes de la subida?

1. Porcentaje que representa el precio nuevo.

$$100\,\% + 8\,\% = \underline{\quad(1)\quad}$$

2. Regla de tres.

$$x = \frac{43{,}20 \cdot 100}{\underline{\quad(2)\quad}} = \underline{\quad(3)\quad}\ €$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un pueblo tenía 3200 habitantes y diez años después tiene 3680. ¿En qué porcentaje ha aumentado su población?

1. Porcentaje que representa la población actual.

(1)

2. Porcentaje de aumento.

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. El precio de la luz subió un 20 % en enero y bajó un 20 % en febrero. A finales de febrero, una factura cuesta 72 €.

a) ¿Cuánto costaba esa factura a finales de enero? ¿Y antes de la subida?
b) ¿Ha vuelto el precio al valor inicial? ¿Qué porcentaje ha variado en total?

Resultado para comprobar: a) Enero: $\frac{72 \cdot 100}{80} = 90$ €; antes: $\frac{90 \cdot 100}{120} = 75$ € b) No: 72 es el 96 % de 75, ha bajado un 4 %

BLOQUE 4

Polinomios y fracciones algebraicas

FICHA 30

El mínimo común múltiplo de polinomios

Vídeo: «M.C.M. con polinomios. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 114

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula el mínimo común múltiplo de:

a) x^2-1 y x^2+3x+2.
b) $(x+1)^2(x-2)^3(x+3)$ y $(x-1)(x+1)^5(x-2)(x+4)$.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Mínimo común múltiplo.** La técnica es la misma que con números: factores comunes y no comunes con el mayor exponente.
- **Ecuaciones de segundo grado.** Para hallar las raíces de cada polinomio y factorizarlo.

Vídeo del ejercicio «M.C.M. con polinomios» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/numeros-30

Repaso: Mínimo común múltiplo

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

1. La idea. Igual que con números: primero se **factoriza** cada polinomio y después se cogen los factores **comunes y no comunes con el mayor exponente**. Para factorizar un polinomio se hallan sus raíces (las soluciones de la ecuación $P(x)=0$) y por cada raíz r se escribe el factor $(x-r)$.

a) Factorizamos x^2-1. Es una ecuación de segundo grado incompleta:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

Con la raíz -1, menos por menos es más: el factor es $(x+1)$.

a) Factorizamos x^2+3x+2.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2} \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-2$$

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

a) El m.c.m.. El factor común es $(x+1)$ (en los dos con exponente 1); los no comunes, $(x-1)$ y $(x+2)$:

$$\text{m.c.m.}=(x+1)(x-1)(x+2)$$

Normalmente se deja factorizado, que es más útil.

b) Ya vienen factorizados. Vamos factor a factor:

- $(x+1)$ es común: el de mayor exponente es $(x+1)^5$.
- $(x-2)$ es común: cogemos $(x-2)^3$.
- $(x+3)$, $(x-1)$ y $(x+4)$ no son comunes, pero también se cogen. Ojo: $(x-1)$ y $(x+1)$ son factores distintos.

$$\text{m.c.m.}=(x+1)^5(x-2)^3(x+3)(x-1)(x+4)$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula el m.c.m. de x^2-4 y x^2-x-2.

1. Factorizamos x^2-4.

$$x^2=4 \Rightarrow x=\pm\underline{\ (1)\ } \Rightarrow x^2-4=(x-2)(\underline{\ (2)\ })$$

2. Factorizamos x^2-x-2.

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1=\underline{\ (3)\ },\ x_2=\underline{\ (4)\ }$$

$$x^2-x-2=(x-2)(\underline{\ (5)\ })$$

3. m.c.m..

$$\text{m.c.m.}=\underline{\qquad (6)\qquad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula el m.c.m. de x^2-2x+1, x^2-1 y $3x+3$.

1. Factorizamos los tres. *Pista: x^2-2x+1 tiene una raíz doble. En $3x+3$ saca factor común el 3.*

(1)

2. m.c.m.. *Pista: ¿qué exponente tiene $(x-1)$ en cada uno?*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Calcula el m.c.m. y el m.c.d. de $P(x) = x^3 - x$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x$.

Resultado para comprobar: $P = x(x-1)(x+1)$; $Q = x(x+1)^2$ m.c.m. $= x(x-1)(x+1)^2$
m.c.d. $= x(x+1)$

FICHA 31

Simplificar fracciones algebraicas

Vídeo: «Fracciones algebraicas. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 114

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica:

$$\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de segundo grado.** Para factorizar el numerador.
- **Factorizar polinomios con Ruffini.** Para factorizar el denominador, que es de tercer grado.

Vídeo del ejercicio «Fracciones algebraicas» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/numeros-31

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Repaso: Factorizar polinomios con Ruffini

Solución

1. La idea. Simplificar es dejarla en la expresión más simple posible: se **factorizan** numerador y denominador y se **tachan** los factores que se repiten.

2. Numerador.

$$x^2+x-2=0 \implies x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \implies x_1=1,\ x_2=-2$$

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

No hay coeficiente delante de x^2 (es un 1), así que no hay que ponerlo delante.

3. Denominador: Ruffini. Las posibles raíces son los divisores del término independiente, ±1. Probamos con 1:

	1	−1	−1	1
1		1	0	−1
	1	0	−1	0

El resto es 0: $x=1$ es raíz. Queda $x^2-1=0$, que da $x=\pm 1$. La raíz 1 sale dos veces (es doble) y la −1 una:

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

4. Tachamos.

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}$$

Se puede quitar el paréntesis de abajo (es una suma por diferencia), pero normalmente es más cómodo y correcto dejarlo factorizado.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica: $\dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$

1. Numerador.

$$x^2-9=(x-3)(\ \text{(1)}\ )$$

2. Denominador.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm5}{2}\ \Rightarrow\ x_1=\ \text{(2)}\ ,\ x_2=\ \text{(3)}$$

$$\Rightarrow\ (x-2)(x+3)$$

3. Simplificamos.

$$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x+3)}=\ \text{(4)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica: $\dfrac{x^3-4x}{x^2+4x+4}$

1. Numerador. *Pista: saca primero factor común la x.*

(1)

2. Denominador. *Pista: ¿es el cuadrado de una suma?*

(2)

3. Simplificamos.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Simplifica: a) $\dfrac{2x^2-2}{x^2-2x+1}$ b) $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^3-x}$

Resultado para comprobar: a) $\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ b) $\dfrac{x(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{x-2}{x+1}$

FICHA 32

Sumar fracciones algebraicas

Vídeo: «Fracciones algebraicas. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 115

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y simplifica:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **m.c.m. de polinomios.** Para el denominador común: el m.c.m. de los tres denominadores.
- **Sumar y restar fracciones.** Se suman igual que las fracciones con números.

Vídeo del ejercicio «Fracciones algebraicas» (desde el minuto 5:12) todosobresaliente.com/v/numeros-32

Repaso: m.c.m. de polinomios

Repaso: Sumar y restar fracciones

Solución

1. Factorizamos los denominadores. Igual que con fracciones de números, hay que reducir a común denominador con el m.c.m. $x+1$ y $x-1$ ya están factorizados (son de primer grado). Y $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$, así que $x^2-1=(x-1)(x+1)$.

2. El m.c.m.. Solo hay dos factores, $(x+1)$ y $(x-1)$, con exponente 1: m.c.m. $=(x+1)(x-1)$, que coincide con el segundo denominador.

3. Numeradores. Lo que se añade al denominador se añade también al numerador (multiplicar arriba y abajo por lo mismo no cambia la fracción):

- $\frac{1}{x+1}$: abajo se añade $(x-1)$; arriba queda $1\cdot(x-1)$.
- $\frac{2x}{x^2-1}$: abajo no se añade nada; arriba queda $2x$.
- $\frac{1}{x-1}$: abajo se añade $(x+1)$; arriba queda $1\cdot(x+1)$.

4. Sumamos y simplificamos.

$$\frac{(x-1)+2x+(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{4x}{(x+1)(x-1)}$$

$4x$ ya está factorizado y no hay ningún factor que tachar: este es el resultado.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y simplifica: $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+2}$

1. m.c.m. de los denominadores.

$$\text{m.c.m.} = \underline{\quad(1)\quad}$$

2. Numeradores.

$$\frac{3(\underline{\quad(2)\quad})}{x(x+2)}+\frac{2\,\underline{(3)}}{x(x+2)}$$

3. Resultado.

$$\frac{3x+6+2x}{x(x+2)} = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y simplifica: $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{18}{x^2-9}$

1. Factorizamos y m.c.m..

(1)

2. Restamos. *Pista: cuidado con el signo menos: afecta a todo el numerador.*

(2)

3. Simplificamos. *Pista: factoriza el numerador: ¿se puede tachar algo?*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ b) $\dfrac{x+1}{x} \cdot \dfrac{x^2}{x^2-1}$

Resultado para comprobar: a) $\dfrac{2(x+1)-(x-1)-2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$ b) $\dfrac{x-1}{x}$

Examen tipo 1

Tiempo: 90 minutos **Puntuación:** 10 puntos (4 problemas de 2,5 puntos)

Hazlo como en un examen de 4.º de ESO: sin mirar el libro ni el formulario, sin calculadora y explicando cada paso. Después corrígelo con las soluciones (solucionario, pág. 115) y anota tu nota en la hoja de seguimiento.

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Explica qué diferencia hay entre un número decimal periódico puro y uno periódico mixto, y escribe un ejemplo de cada uno. (1 punto)

b) Resuelve:

i) Calcula $2{,}1\overline{6} - 0{,}\overline{6}$ pasando antes los dos números a fracción. Da el resultado como fracción irreducible. (0,75 puntos)

ii) Una familia gasta $\frac{1}{4}$ de su sueldo en el alquiler y $\frac{2}{5}$ de lo que le queda en comida. Ahorra el resto, que son 540 €. ¿Cuál es su sueldo? (0,75 puntos)

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Explica por qué $(-2)^4$ y -2^4 no valen lo mismo, y qué significa que una potencia tenga exponente negativo. Pon un ejemplo. (1 punto)

b) Resuelve:

i) Simplifica y da el resultado como fracción: $\dfrac{12^2 \cdot 3^{-3} \cdot 2}{18 \cdot 4^2}$ (0,75 puntos)

ii) La masa de la Tierra es $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg y la de la Luna $7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg. ¿Cuántas veces es mayor la masa de la Tierra? ¿Cuánto suman las dos masas? Da el resultado en notación científica con tres cifras. (0,75 puntos)

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Explica qué es racionalizar y por qué, cuando en el denominador hay una suma con una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado. (1 punto)

b) Resuelve:

i) Simplifica: $2\sqrt{12} - \sqrt{75} + \sqrt{27}$ (0,75 puntos)

ii) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$ (0,75 puntos)

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Explica la diferencia entre dos magnitudes directamente proporcionales y dos inversamente proporcionales, con un ejemplo de cada una. (1 punto)

b) Resuelve:

i) El precio de un artículo sube un 20 % y después baja un 20 %. Ahora cuesta 48 €. ¿Cuánto costaba al principio? (0,75 puntos)

ii) 6 grifos iguales llenan una piscina de 120 m^3 en 10 horas. ¿Cuánto tardarán 4 de esos grifos en llenar una piscina de 96 m^3? (0,75 puntos)

Examen tipo 2

Tiempo: 90 minutos **Puntuación:** 10 puntos (4 problemas de 2,5 puntos)

Hazlo como en un examen de 4.º de ESO: sin mirar el libro ni el formulario, sin calculadora y explicando cada paso. Después corrígelo con las soluciones (solucionario, pág. 116) y anota tu nota en la hoja de seguimiento.

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Explica cómo se calculan el m.c.d. y el m.c.m. de dos números a partir de su descomposición en factores primos, y en qué se diferencian. (1 punto)

b) Resuelve:

   i) Tenemos 84 naranjas y 126 manzanas y queremos repartirlas en cestas iguales, con el mayor número de cestas posible y sin que sobre fruta. ¿Cuántas cestas haremos y qué llevará cada una? (0,75 puntos)

   ii) El grifo A llena un depósito en 3 horas y el grifo B en 6 horas. El desagüe, con los grifos cerrados, lo vacía en 4 horas. Si el depósito está vacío y abrimos los dos grifos y el desagüe a la vez, ¿cuánto tarda en llenarse? (0,75 puntos)

Problema 2 (2,5 puntos)

a) ¿Qué condición tiene que cumplir un número para estar escrito en notación científica? ¿Lo está $0{,}45 \cdot 10^{-3}$? Si no lo está, escríbelo bien. (1 punto)

b) Resuelve:

   i) Calcula y da el resultado en notación científica: $\dfrac{(3{,}2 \cdot 10^{-4}) \cdot (5 \cdot 10^{7})}{8 \cdot 10^{2}}$ (0,75 puntos)

   ii) Simplifica y deja el resultado sin exponentes negativos: $\dfrac{(a^3\, b^{-2})^2 \cdot (a\, b)^{-1}}{a^2\, b^{-3}}$ (0,75 puntos)

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Razona por qué $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no se puede escribir como una sola raíz y, en cambio, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ sí. (1 punto)

b) Resuelve:

i) Multiplica y extrae factores: $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{2}$ (0,75 puntos)

ii) Racionaliza y simplifica: $\dfrac{10}{\sqrt[3]{4}}$ (0,75 puntos)

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Explica qué relación hay entre las raíces de un polinomio y su factorización. Pon un ejemplo con un polinomio de segundo grado. (1 punto)

b) Resuelve:

i) Simplifica: $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ (0,75 puntos)

ii) Opera y simplifica: $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-4}$ (0,75 puntos)

Solucionario

Respuestas de todos los huecos de los ejercicios guiados, en el mismo orden que el libro. Cada ficha indica la página donde está su enunciado.

Ficha 1 · Descomponer un número en factores primos (ficha en la pág. 2)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: 15

Hueco 3: 5

Hueco 4: $2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Hueco 5: 21

Hueco 6: 7

Hueco 7: $2^2 \cdot 3 \cdot 7$

◔ Guiado 2

Hueco 1: $360 \to 180 \to 90 \to 45$ (tres veces entre 2) $\to 15 \to 5$ (dos veces entre 3) $\to 1$ (entre 5): $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

Hueco 2: $1 + 5 + 7 + 5 = 18$, múltiplo de 3. $1575 \to 525 \to 175$ (dos veces entre 3) $\to 35 \to 7$ (dos veces entre 5) $\to 1$ (entre 7): $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Hueco 3: Ninguno: los dos tienen más de un factor primo distinto.

Ficha 2 · El máximo común divisor (ficha en la pág. 5)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: 3

Hueco 3: 2 (2^2 frente a 2^4: nos quedamos con 2^2)

Hueco 4: 1 (3^2 frente a 3: nos quedamos con 3)

Hueco 5: $2^2 \cdot 3$

Hueco 6: 12

◔ Guiado 2

Hueco 1: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $64 = 2^6$; $81 = 3^4$

Hueco 2: Comunes: el 2 y el 3, los dos con exponente 2 (el 5 y el 7 no son comunes). m.c.d.$(180, 252) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Hueco 3: No tienen factores primos comunes: m.c.d.$(64, 81) = 1$

Ficha 3 · De decimal a fracción: exactos y periódicos puros (ficha en la pág. 8)

Guiado 1

Hueco 1: 125
Hueco 2: 100
Hueco 3: 9
Hueco 4: 312
Hueco 5: 3
Hueco 6: 309

Guiado 2

Hueco 1: Tres cifras decimales: $0{,}045 = \frac{45}{1000}$. m.c.d.$(45, 1000) = 5$: $\frac{45}{1000} = \frac{9}{200}$

Hueco 2: $12{,}\overline{7} = \frac{127 - 12}{9} = \frac{115}{9}$ (ya es irreducible)

Hueco 3: Tres nueves: $0{,}\overline{324} = \frac{324}{999} = \frac{12}{37}$ (dividiendo entre 27)

Ficha 4 · De decimal a fracción: periódicos mixtos (ficha en la pág. 11)

Guiado 1

Hueco 1: 1
Hueco 2: un
Hueco 3: 1
Hueco 4: 90
Hueco 5: 15
Hueco 6: 23
Hueco 7: 990
Hueco 8: 2322

Guiado 2

Hueco 1: Un nueve (periodo de una cifra) y un cero (una cifra antes del periodo): $0{,}8\overline{3} = \frac{83 - 8}{90} = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$

Hueco 2: Un nueve y dos ceros: $1{,}12\overline{5} = \frac{1125 - 112}{900} = \frac{1013}{900}$ (irreducible)

Ficha 5 · La fracción de una cantidad (ficha en la pág. 14)

Guiado 1

Hueco 1: 1500
Hueco 2: 600
Hueco 3: 600
Hueco 4: 900
Hueco 5: $\frac{3}{5}$

Hueco 6: 900

Guiado 2

Hueco 1: Autobús: $\frac{3}{7} \cdot 840 = 360$ alumnos. Andando: $\frac{1}{4} \cdot 840 = 210$ alumnos.

Hueco 2: $840 - 360 - 210 = 270$ alumnos en bici. (O bien: $1 - \frac{3}{7} - \frac{1}{4} = \frac{28-12-7}{28} = \frac{9}{28}$, y $\frac{9}{28} \cdot 840 = 270$.)

Ficha 6 · El total a partir de una parte (ficha en la pág. 17)

Guiado 1

Hueco 1: $\frac{5}{8}$

Hueco 2: $\frac{5}{8}$

Hueco 3: 8

Hueco 4: 5

Hueco 5: 240

Guiado 2

Hueco 1: Quedan $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ del depósito: los 350 L son $\frac{5}{9}$ del total.

Hueco 2: Me piden el total: $\frac{5}{9}\,x = 350 \Rightarrow x = \dfrac{350 \cdot 9}{5} = 630$ L había al principio.

Hueco 3: $630 - 350 = 280$ L (o $\frac{4}{9} \cdot 630 = 280$).

Ficha 7 · Trabajar juntos: sumar velocidades (ficha en la pág. 20)

Guiado 1

Hueco 1: $\frac{1}{3}$

Hueco 2: $\frac{1}{2}$

Hueco 3: 3

Hueco 4: 2

Hueco 5: $\frac{1}{6}$

Hueco 6: 6

Guiado 2

Hueco 1: Primera: $\frac{1}{10}$ de pedido por hora; las dos juntas: $\frac{1}{6}$; la segunda: v_2, la incógnita.

Hueco 2: $\dfrac{1}{10} + v_2 = \dfrac{1}{6}$

Hueco 3: $v_2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{5}{30} - \dfrac{3}{30} = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$: la segunda máquina sola tardaría 15 horas.

Ficha 8 · Grifo y desagüe: una velocidad que resta (ficha en la pág. 23)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 4

Hueco 2: 6

Hueco 3: 2

Hueco 4: 3

Hueco 5: $-\frac{1}{12}$

Hueco 6: $\frac{1}{12}$

Hueco 7: 12

◔ Guiado 2

Hueco 1: Conocemos $v_G = \frac{1}{5}$ y $v_D = \frac{1}{8}$; nos piden $v_{\text{juntos}} = v_G - v_D$.

Hueco 2: $v_{\text{juntos}} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{8}{40} - \dfrac{5}{40} = \dfrac{3}{40}$ de depósito por hora.

Hueco 3: Tarda $\dfrac{40}{3} = 13{,}3$ horas (13 h 20 min) en llenarse.

Ficha 9 · La fracción de una fracción (ficha en la pág. 26)

◑ Guiado 1

Hueco 1: $\frac{1}{4}$

Hueco 2: $\frac{1}{4}$

Hueco 3: 24

Hueco 4: 18

Hueco 5: 24

◔ Guiado 2

Hueco 1: Después del trigo queda $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ de la finca. De ese resto, la viña es $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Hueco 2: Viña: $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ de la finca.

Hueco 3: $\frac{9}{20}\,x = 18 \Rightarrow x = \dfrac{18 \cdot 20}{9} = 40$ hectáreas.

Ficha 10 · Exponente negativo, exponente cero y signos (ficha en la pág. 29)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 2^3

Hueco 2: $\frac{1}{8}$

Hueco 3: 9

Hueco 4: -9

Hueco 5: $\frac{7}{2}$

Hueco 6: 1

◔ Guiado 2

Hueco 1: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$

Hueco 2: $-2^4 = -16$ (sin paréntesis, el menos queda fuera) y $(-2)^4 = 16$: $-16 + 16 = 0$

Hueco 3: $5^0 - 5^{-1} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$; $(-1)^7 \cdot 2^{-1} = (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ (exponente impar: el signo se mantiene)

Ficha 11 · Propiedades de las potencias con números (ficha en la pág. 32)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: 2

Hueco 3: 8

Hueco 4: 3

Hueco 5: 6

Hueco 6: $6 - 3 - 6 = -3$

Hueco 7: $\frac{1}{8}$

◔ Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{(5^2)^3 \cdot 5^{-2}}{(5^3)^2} = \dfrac{5^6 \cdot 5^{-2}}{5^6} = 5^{6-2-6} = 5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

Hueco 2: $\dfrac{(2^2 \cdot 3)^2 \cdot 3^{-1}}{2 \cdot 3^2 \cdot 2^3} = \dfrac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 3^{-1}}{2^4 \cdot 3^2}$

Hueco 3: Base 2: $2^{4-4} = 2^0 = 1$. Base 3: $3^{2-1-2} = 3^{-1}$. Resultado: $\dfrac{1}{3}$

Ficha 12 · Propiedades de las potencias con letras (ficha en la pág. 35)

◑ Guiado 1

Hueco 1: a

Hueco 2: 1

Hueco 3: 2

Hueco 4: 1

Hueco 5: 1

Hueco 6: $a^2\, b$

◔ Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{x^{-2}\, y^3 \cdot x^{-4}}{x^3\, y^{-1} \cdot y^5}$

Hueco 2: $x^{-2-4-3} = x^{-9}$; $y^{3-(-1)-5} = y^{3+1-5} = y^{-1}$

Hueco 3: $x^{-9}\, y^{-1} = \dfrac{1}{x^9\, y}$

Ficha 13 · Escribir números en notación científica (ficha en la pág. 38)

Guiado 1

Hueco 1: 7

Hueco 2: 3,8

Hueco 3: -4

Hueco 4: 21 000

Guiado 2

Hueco 1: $149\,600\,000 = 1{,}496 \cdot 10^8$ km

Hueco 2: Movemos la coma 6 lugares a la derecha: $0{,}000\,007\,5 = 7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m

Hueco 3: $3{,}05 \cdot 10^{-6} = 0{,}000\,003\,05$

Ficha 14 · Multiplicar y dividir en notación científica (ficha en la pág. 41)

Guiado 1

Hueco 1: 15

Hueco 2: 7

Hueco 3: 4

Hueco 4: $3 \cdot 10^{-6}$

Guiado 2

Hueco 1: $(4 \cdot 5{,}5) \cdot 10^{-3+(-6)} = 22 \cdot 10^{-9} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}$

Hueco 2: $\frac{1{,}2}{4} \cdot 10^{5-(-3)} = 0{,}3 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^7$ (de 0,3 a 3 hemos multiplicado por 10, así que la potencia se divide entre 10)

Ficha 15 · Sumar y restar en notación científica (ficha en la pág. 44)

Guiado 1

Hueco 1: $4{,}2 \cdot 10^4$

Hueco 2: 0,4

Hueco 3: 0,4

Hueco 4: $2{,}9 \cdot 10^7$

Guiado 2

Hueco 1: 10^{-3} es mayor que 10^{-4}: $5 \cdot 10^{-4} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$. $(7{,}5 + 0{,}5) \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^{-3}$

Hueco 2: $8 \cdot 10^3 = 0{,}08 \cdot 10^5$. $(1{,}2 - 0{,}08) \cdot 10^5 = 1{,}12 \cdot 10^5$

Ficha 16 · Extraer factores de un radical (ficha en la pág. 48)

Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: $3 \cdot 2$

Hueco 3: 9

Hueco 4: 2
Hueco 5: 5
Hueco 6: 10

Guiado 2

Hueco 1: $72 = 2^3 \cdot 3^2$
Hueco 2: $\sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
Hueco 3: $3^7 = 3^3 \cdot 3^3 \cdot 3$ (salen dos treses) y $2^5 = 2^3 \cdot 2^2$ (sale un dos): $\sqrt[3]{3^7 \cdot 2^5} = 3 \cdot 3 \cdot 2\sqrt[3]{3 \cdot 2^2} = 18\sqrt[3]{12}$

Ficha 17 · Introducir factores en un radical (ficha en la pág. 51)

Guiado 1

Hueco 1: 2
Hueco 2: 18
Hueco 3: 2
Hueco 4: 4
Hueco 5: 3

Guiado 2

Hueco 1: Raíz cúbica: los factores entran al cubo. $\sqrt[3]{2^3 \cdot (3^2)^3 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^7}$
Hueco 2: $\sqrt{(a^2)^2 \cdot b^2 \cdot a\, b^3} = \sqrt{a^5\, b^5}$

Ficha 18 · Sumar, multiplicar y dividir radicales (ficha en la pág. 53)

Guiado 1

Hueco 1: 1
Hueco 2: $6\sqrt{5}$
Hueco 3: $-1 + 3$
Hueco 4: $3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$
Hueco 5: 18
Hueco 6: $3\sqrt{2}$

Guiado 2

Hueco 1: $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3};\ \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$
Hueco 2: $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$
Hueco 3: $\sqrt{\dfrac{50 \cdot 2}{5}} = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Ficha 19 · Multiplicar radicales de distinto índice (ficha en la pág. 56)

Guiado 1

Hueco 1: 6
Hueco 2: 3
Hueco 3: 2

Hueco 4: 72
Hueco 5: 12
Hueco 6: 2
Hueco 7: 5

Guiado 2

Hueco 1: $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2}$; m.c.m.(3, 2) = 6: $\sqrt[6]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}$
Hueco 2: m.c.m.(2, 3) = 6: $\sqrt[6]{a^9 \cdot a^4} = \sqrt[6]{a^{13}} = a^2\sqrt[6]{a}$

Ficha 20 · Racionalizar: un radical en el denominador (ficha en la pág. 59)

Guiado 1

Hueco 1: $\sqrt{3}$
Hueco 2: 3
Hueco 3: $2\sqrt{3}$
Hueco 4: 2
Hueco 5: 25

Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{10\sqrt{5}}{3\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

Hueco 2: Falta 2^1: $\dfrac{4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2}} = \dfrac{4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{4\sqrt[4]{2}}{2} = 2\sqrt[4]{2}$

Ficha 21 · Racionalizar multiplicando por el conjugado (ficha en la pág. 62)

Guiado 1

Hueco 1: $\sqrt{5} + 1$
Hueco 2: 4
Hueco 3: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Guiado 2

Hueco 1: Conjugado: $\sqrt{6} - \sqrt{2}$. Abajo: $(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2 = 6 - 2 = 4$.
Hueco 2: $\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sqrt{12} - 2 = 2\sqrt{3} - 2$
Hueco 3: $\dfrac{2\sqrt{3}-2}{4} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

Ficha 22 · Regla de tres simple directa (ficha en la pág. 66)

Guiado 1

Hueco 1: más
Hueco 2: directa
Hueco 3: 350
Hueco 4: 21

Guiado 2

Hueco 1: Un cuarto de hora son 15 min. Directa: 3 min $\rightarrow$ 45 páginas; 15 min $\rightarrow x$. $x = \dfrac{15 \cdot 45}{3} = 225$ páginas.

Hueco 2: 45 páginas $\rightarrow$ 3 min; 120 páginas $\rightarrow x$. $x = \dfrac{120 \cdot 3}{45} = 8$ minutos.

Ficha 23 · Regla de tres simple inversa (ficha en la pág. 69)

Guiado 1

Hueco 1: menos

Hueco 2: inversa

Hueco 3: 3

Hueco 4: 120

Hueco 5: 2

Guiado 2

Hueco 1: Quedan $24 - 6 = 18$ vacas. Menos vacas, más días: inversa.

Hueco 2: $x = \dfrac{24 \cdot 45}{18} = 60$ días. Con fracciones: $\dfrac{24}{18} = \dfrac{x}{45} \Rightarrow x = \dfrac{45 \cdot 24}{18} = 60$.

Ficha 24 · Regla de tres compuesta: directa e inversa (ficha en la pág. 72)

Guiado 1

Hueco 1: directa

Hueco 2: directa

Hueco 3: 3

Hueco 4: 6

Hueco 5: 30

Hueco 6: 1500

Guiado 2

Hueco 1: pintores: 6 y 4; horas/día: 8 y 6; días: 10 y x. Pintores y días: inversa (menos pintores, más días). Horas y días: inversa (menos horas al día, más días).

Hueco 2: $\dfrac{10}{x} = \dfrac{4}{6} \cdot \dfrac{6}{8} = \dfrac{24}{48} \Rightarrow x = \dfrac{10 \cdot 48}{24} = 20$ días.

Ficha 25 · Regla de tres compuesta mixta (ficha en la pág. 75)

Guiado 1

Hueco 1: inversa

Hueco 2: inversa

Hueco 3: directa

Hueco 4: 8

Hueco 5: 6

Hueco 6: 5 (las tres fracciones multiplicadas dan $\frac{19\,200}{19\,200} = 1$, así que $\frac{5}{x} = 1$)

Guiado 2

Hueco 1: imprentas: 3 y 4; libros: 9000 y 12 000; días: 6 y 5; horas diarias: 10 y x.

Hueco 2: Imprentas: más imprentas, menos horas (inversa). Libros: más libros, más horas (directa). Días: más días, menos horas cada día (inversa).

Hueco 3: $\frac{10}{x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9000}{12\,000} \cdot \frac{5}{6} = \frac{180\,000}{216\,000} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 216\,000}{180\,000} = 12$ horas diarias.

Ficha 26 · El porcentaje de una cantidad (ficha en la pág. 78)

Guiado 1

Hueco 1: 0,30 (o $\frac{30}{100}$)

Hueco 2: 72

Hueco 3: 0,04

Hueco 4: 50

Guiado 2

Hueco 1: $0{,}35 \cdot 880 = 308$ alumnos

Hueco 2: $0{,}075 \cdot 880 = 66$ alumnos

Ficha 27 · El total y el tanto por ciento (ficha en la pág. 81)

Guiado 1

Hueco 1: 100

Hueco 2: 240

Hueco 3: 320

Hueco 4: 15

Guiado 2

Hueco 1: $84\,\% \to 21$; $100\,\% \to x$: $x = \frac{21 \cdot 100}{84} = 25$ alumnos

Hueco 2: $100\,\% - 84\,\% = 16\,\%$ (o bien: suspenden $25 - 21 = 4$, y $\frac{4 \cdot 100}{25} = 16\,\%$)

Ficha 28 · Descuentos porcentuales inversos (ficha en la pág. 84)

Guiado 1

Hueco 1: 80 %

Hueco 2: 80

Hueco 3: 70

Guiado 2

Hueco 1: $350 \to 100\,\%$; $294 \to x$: $x = \frac{294 \cdot 100}{350} = 84\,\%$ (es lo que se paga)

Hueco 2: $100\,\% - 84\,\% = 16\,\%$ de descuento

Ficha 29 · Aumentos porcentuales inversos (ficha en la pág. 87)

Guiado 1

Hueco 1: 108 %

Hueco 2: 108

Hueco 3: 40

Guiado 2

Hueco 1: $3200 \longrightarrow 100\,\%$; $3680 \longrightarrow x$: $x = \dfrac{3680 \cdot 100}{3200} = 115\,\%$

Hueco 2: $115\,\% - 100\,\% = 15\,\%$ de aumento

Ficha 30 · El mínimo común múltiplo de polinomios (ficha en la pág. 91)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: $x + 2$

Hueco 3: 2

Hueco 4: -1

Hueco 5: $x + 1$

Hueco 6: $(x - 2)(x + 2)(x + 1)$

Guiado 2

Hueco 1: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ (raíz doble $x = 1$); $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$; $3x + 3 = 3(x + 1)$

Hueco 2: $(x - 1)$ tiene exponente 2 en el primero y 1 en el segundo: se coge $(x - 1)^2$. m.c.m. $= 3(x - 1)^2(x + 1)$

Ficha 31 · Simplificar fracciones algebraicas (ficha en la pág. 94)

Guiado 1

Hueco 1: $x + 3$

Hueco 2: 2

Hueco 3: -3

Hueco 4: $\dfrac{x - 3}{x - 2}$

Guiado 2

Hueco 1: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$

Hueco 2: $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ (raíz doble $x = -2$)

Hueco 3: $\dfrac{x(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \dfrac{x(x - 2)}{x + 2}$

Ficha 32 · Sumar fracciones algebraicas (ficha en la pág. 97)

◑ Guiado 1

Hueco 1: $x(x+2)$

Hueco 2: $x+2$

Hueco 3: x (o $\cdot x$)

Hueco 4: $\dfrac{5x+6}{x(x+2)}$

◔ Guiado 2

Hueco 1: $x^2-9=(x-3)(x+3)$; m.c.m. $=(x-3)(x+3)$

Hueco 2: $\dfrac{x(x+3)-18}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x^2+3x-18}{(x-3)(x+3)}$

Hueco 3: $x^2+3x-18=(x+6)(x-3)$ (raíces 3 y -6): $\dfrac{(x+6)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x+6}{x+3}$

Examen tipo 1 · Soluciones (examen en la pág. 100)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) En un **periódico puro** las cifras que se repiten (el periodo) empiezan justo después de la coma: $0,\overline{3}=0,333\ldots$ En un **periódico mixto** hay una o varias cifras entre la coma y el periodo que no se repiten (el anteperiodo): $0,1\overline{6}=0,1666\ldots$ Por eso, en la fracción generatriz del mixto, además de los nueves del periodo, el denominador lleva un cero por cada cifra del anteperiodo.

b) i) $2,1\overline{6}=\dfrac{216-21}{90}=\dfrac{195}{90}=\dfrac{13}{6}$; $0,\overline{6}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{6}$. $\dfrac{13}{6}-\dfrac{4}{6}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$.

b) ii) Tras el alquiler queda $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. La comida es $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$: $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$ del sueldo. Ahorra $1-\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=\frac{20-5-6}{20}=\frac{9}{20}$ del sueldo, que son 540 €: $\frac{9}{20}x=540\Rightarrow x=\dfrac{540\cdot 20}{9}=1200$ €.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) En $(-2)^4$ el exponente afecta al paréntesis, con el signo: $(-2)(-2)(-2)(-2)=16$. En -2^4 el exponente solo afecta al 2 y el menos queda fuera: $-(2^4)=-16$. Un exponente negativo indica que la potencia está en el otro lado de la fracción: $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; por ejemplo, $3^{-2}=\frac{1}{9}$.

b) i) Descomponemos: $12^2=(2^2\cdot 3)^2=2^4\cdot 3^2$, $18=2\cdot 3^2$, $4^2=2^4$.

$$\frac{2^4\cdot 3^2\cdot 3^{-3}\cdot 2}{2\cdot 3^2\cdot 2^4}=2^{4+1-1-4}\cdot 3^{2-3-2}=2^0\cdot 3^{-3}=\frac{1}{27}$$

b) ii) $\dfrac{5{,}97\cdot 10^{24}}{7{,}35\cdot 10^{22}}=0{,}812\cdot 10^2=81{,}2$ veces. Suma: $7{,}35\cdot 10^{22}=0{,}0735\cdot 10^{24}$; $(5{,}97+0{,}0735)\cdot 10^{24}=6{,}04\cdot 10^{24}$ kg.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Racionalizar es transformar una fracción con raíces en el denominador en otra equivalente sin raíces abajo, multiplicando numerador y denominador por lo mismo. Si abajo hay $\sqrt{b}+c$, se multiplica por el conjugado $\sqrt{b}-c$ porque así queda una suma por diferencia, que es diferencia de cuadrados: $(\sqrt{b}+c)(\sqrt{b}-c)=b-c^2$, y la raíz desaparece.

b) i) $2\sqrt{12}=2\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$; $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$; $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$. $4\sqrt{3}-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

b) ii) $\dfrac{6\,(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\dfrac{6\,(3+\sqrt{3})}{9-3}=\dfrac{6\,(3+\sqrt{3})}{6}=3+\sqrt{3}$.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Son **directamente proporcionales** si al multiplicar una por un número la otra queda multiplicada por el mismo número (kilos de fruta y precio). Son **inversamente proporcionales** si al multiplicar una por un número la otra queda dividida entre ese número (número de obreros y días que tardan).

b) i) Tras subir un 20 % el precio es el 120 % del inicial; tras bajar un 20 % queda el 80 % de eso: $1{,}2\cdot 0{,}8=0{,}96$, el 96 % del precio inicial. $x=\dfrac{48\cdot 100}{96}=50\,€$.

b) ii) Tabla: grifos 6 y 4; volumen 120 y 96; horas 10 y x. Grifos y horas: inversa (menos grifos, más horas). Volumen y horas: directa.

$$\frac{10}{x}=\frac{4}{6}\cdot\frac{120}{96}=\frac{480}{576}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{10\cdot 576}{480}=12\text{ horas}$$

Examen tipo 2 · Soluciones (examen en la pág. 102)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Se descomponen los números en factores primos. El **m.c.d.** se forma con los factores **comunes** elevados al **menor** exponente: es el mayor número que divide a los dos. El **m.c.m.** se forma con los factores **comunes y no comunes** elevados al **mayor** exponente: es el menor número que es múltiplo de los dos.

b) i) $84=2^2\cdot 3\cdot 7$ y $126=2\cdot 3^2\cdot 7$. m.c.d. $=2\cdot 3\cdot 7=42$. Haremos 42 cestas, cada una con $84:42=2$ naranjas y $126:42=3$ manzanas.

b) ii) Velocidades (depósitos por hora): A, $\frac{1}{3}$; B, $\frac{1}{6}$; desagüe, $\frac{1}{4}$, que resta.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{4+2-3}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Se llena un depósito cada 4 horas: tarda 4 horas.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Un número está en notación científica si se escribe como $a \cdot 10^n$ con una sola cifra entera distinta de cero en a ($1 \leq a < 10$). $0{,}45 \cdot 10^{-3}$ no lo está, porque $0{,}45 < 1$. Pasar de 0,45 a 4,5 es multiplicar por 10, así que la potencia se divide entre 10: $4{,}5 \cdot 10^{-4}$.

b) i) Numerador: $(3{,}2 \cdot 5) \cdot 10^{-4+7} = 16 \cdot 10^3$. Dividimos: $\frac{16}{8} \cdot 10^{3-2} = 2 \cdot 10^1$ (es decir, 20).

b) ii) $(a^3b^{-2})^2 = a^6b^{-4}$ y $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

$$\frac{a^6b^{-4}a^{-1}b^{-1}}{a^2b^{-3}} = a^{6-1-2}\,b^{-4-1+3} = a^3b^{-2} = \frac{a^3}{b^2}$$

Problema 3 (2,5 puntos)

a) La raíz de un producto es el producto de las raíces, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, pero no hay ninguna propiedad así para la suma: $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$ (por ejemplo, $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$, mientras que $\sqrt{25} = 5$). Solo se pueden sumar radicales semejantes, como $2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

b) i) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4}$. Índice común: m.c.m.(3, 2) = 6.

$$\sqrt[6]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^{11}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2^5} = 2\sqrt[6]{32}$$

b) ii) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$: falta un 2 para llegar al cubo. $\dfrac{10\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{10\sqrt[3]{2}}{2} = 5\sqrt[3]{2}$.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Si r es una raíz de $P(x)$ (es decir, $P(r) = 0$), entonces $(x - r)$ es un factor de $P(x)$. Un polinomio de segundo grado con raíces r_1 y r_2 se factoriza como $a(x - r_1)(x - r_2)$. Por ejemplo, $x^2 - 5x + 6$ tiene raíces 2 y 3: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

b) i) $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{x-3}{x+2}$.

b) ii) m.c.m. $= (x - 2)(x + 2)$.

$$\frac{2(x+2)-8}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x-4}{(x-2)(x+2)} = \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x+2}.$$

Resumen de reglas

m.c.d. y m.c.m.	Se descomponen en factores primos. m.c.d.: factores **comunes** con el **menor** exponente. m.c.m.: comunes y no comunes con el **mayor** exponente.
Fracción generatriz	Exacto: $0{,}28 = \frac{28}{100}$. Puro: $2{,}\overline{98} = \frac{298-2}{99}$. Mixto: $1{,}0\overline{27} = \frac{1027-10}{990}$ (nueves por las cifras del periodo; ceros por las del anteperiodo).
Fracciones	$\frac{a}{b}$ de $C = \frac{a \cdot C}{b}$. Si $\frac{a}{b}$ de x es P: $x = \frac{P \cdot b}{a}$. Trabajos y grifos: se suman (o restan) las velocidades $\frac{1}{t}$.
Potencias	$a^m a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^m = a^m b^m$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^0 = 1$; $(-a)^2 = a^2$ pero $-a^2 = -(a^2)$.
Notación científica	$a \cdot 10^n$ con $1 \le a < 10$. Multiplicar/dividir: números por un lado y potencias por otro. Sumar/restar: primero el mismo exponente.
Radicales	$\sqrt[n]{a^n\, b} = a\,\sqrt[n]{b}$ (extraer); $a\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\, b}$ (introducir); $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; solo se suman radicales semejantes; índice común: m.c.m. de los índices.
Racionalizar	$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$; $\frac{a}{\sqrt[n]{b^k}} = \frac{a\,\sqrt[n]{b^{n-k}}}{b}$; $\frac{a}{\sqrt{b}+c}$: por el conjugado, $(\sqrt{b}+c)(\sqrt{b}-c) = b - c^2$.
Regla de tres	Directa: $x = \frac{b \cdot c}{a}$ (diagonal). Inversa: $x = \frac{a \cdot b}{c}$ (horizontal). Compuesta: $\frac{\text{dato}}{x}$ = producto de fracciones (las inversas, dadas la vuelta).
Porcentajes	$p\,\%$ de $C = \frac{p}{100} C$. Descuento del $d\,\%$: se paga el $(100 - d)\,\%$. Aumento del $a\,\%$: se pasa al $(100 + a)\,\%$.
Polinomios	Raíz $r \Leftrightarrow$ factor $(x - r)$. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Fracciones algebraicas: factorizar y tachar; para sumar, m.c.m. de los denominadores.

Hoja de seguimiento

Marca cada ejercicio cuando te salga sin mirar el solucionario.

Ficha	Tema	Guiado 1	Guiado 2	Examen	Repasar
1	Descomponer un número en factores primos	☐	☐	☐	☐
2	El máximo común divisor	☐	☐	☐	☐
3	De decimal a fracción: exactos y periódicos puros	☐	☐	☐	☐
4	De decimal a fracción: periódicos mixtos	☐	☐	☐	☐
5	La fracción de una cantidad	☐	☐	☐	☐
6	El total a partir de una parte	☐	☐	☐	☐
7	Trabajar juntos: sumar velocidades	☐	☐	☐	☐
8	Grifo y desagüe: una velocidad que resta	☐	☐	☐	☐
9	La fracción de una fracción	☐	☐	☐	☐
10	Exponente negativo, exponente cero y signos	☐	☐	☐	☐
11	Propiedades de las potencias con números	☐	☐	☐	☐
12	Propiedades de las potencias con letras	☐	☐	☐	☐
13	Escribir números en notación científica	☐	☐	☐	☐
14	Multiplicar y dividir en notación científica	☐	☐	☐	☐
15	Sumar y restar en notación científica	☐	☐	☐	☐
16	Extraer factores de un radical	☐	☐	☐	☐
17	Introducir factores en un radical	☐	☐	☐	☐
18	Sumar, multiplicar y dividir radicales	☐	☐	☐	☐
19	Multiplicar radicales de distinto índice	☐	☐	☐	☐
20	Racionalizar: un radical en el denominador	☐	☐	☐	☐
21	Racionalizar multiplicando por el conjugado	☐	☐	☐	☐
22	Regla de tres simple directa	☐	☐	☐	☐
23	Regla de tres simple inversa	☐	☐	☐	☐
24	Regla de tres compuesta: directa e inversa	☐	☐	☐	☐
25	Regla de tres compuesta mixta	☐	☐	☐	☐
26	El porcentaje de una cantidad	☐	☐	☐	☐
27	El total y el tanto por ciento	☐	☐	☐	☐
28	Descuentos porcentuales inversos	☐	☐	☐	☐
29	Aumentos porcentuales inversos	☐	☐	☐	☐
30	El mínimo común múltiplo de polinomios	☐	☐	☐	☐
31	Simplificar fracciones algebraicas	☐	☐	☐	☐
32	Sumar fracciones algebraicas	☐	☐	☐	☐
Examen tipo 1	nota: _____			☐	☐
Examen tipo 2	nota: _____			☐	☐

Recursos complementarios



Lista de reproducción «Matemáticas secundaria»: los vídeos de este cuaderno

https://todosobresaliente.com/v/numeros-lista



Web de TodoSobresaliente: www.TodoSobresaliente.com

https://www.todosobresaliente.com