COLECCIÓN PRÁCTICA GUIADA · MATEMÁTICAS

Ecuaciones, sistemas e inecuaciones

Del repaso al nivel de 4.º de ESO

Ejercicios resueltos en vídeo · Ejercicios guiados
Ejercicios de examen · Solucionario

Con el vídeo de cada ejercicio resuelto (código QR)



TodoSobresaliente
www.TodoSobresaliente.com

Ecuaciones, sistemas e inecuaciones. Del repaso al nivel de 4.º de ESO

Primera edición, 2026
© TodoSobresaliente. Todos los derechos reservados.

ISBN (papel): [ISBN papel pendiente]
ISBN (digital): [ISBN digital pendiente]

Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra sin autorización del autor.

Web: www.TodoSobresaliente.com
Contacto: profesor@todosobresaliente.com

Índice

Cómo usar este cuaderno **iv**

1 Ecuaciones **1**

1 Ecuaciones de primer grado con paréntesis y fracciones . 2
2 Del enunciado a la ecuación: lenguaje algebraico 5
3 Ecuaciones de segundo grado incompletas 8
4 Ecuación completa: la fórmula 11
5 Solución doble y ecuaciones sin solución 14
6 Ecuaciones bicuadradas: cambio de variable 17
7 Ecuaciones de grado 3 y 4 por Ruffini 20
8 Si falta el término independiente: factor común 23
9 Ecuaciones con la x en el denominador 26
10 Ecuaciones con una raíz 29
11 Ecuaciones con dos raíces 32
12 Ecuaciones con valor absoluto 35
13 Problemas de obreros y grifos con ecuaciones 37
14 Ecuaciones exponenciales: potencias de igual base 40
15 Qué es un logaritmo: calcular logaritmos 43
16 Logaritmos: calcular la base o el número 46
17 Propiedades de los logaritmos 49
18 Ecuaciones logarítmicas 52
19 Ecuaciones logarítmicas: dos trucos 55

2 Sistemas de ecuaciones **57**

20 Sistemas 2×2: sustitución e igualación 58
21 Sistemas 2×2: reducción 61
22 Sistemas 3×3: método de Gauss 64

3 Inecuaciones **67**

23 Intervalos: desigualdad, intervalo y recta 68
24 Inecuaciones de primer grado: el cambio de signo 71
25 Inecuaciones con paréntesis y fracciones 74
26 Sistemas de inecuaciones 77

27 Inecuaciones de segundo grado: la tabla de signos 80
28 Inecuaciones de segundo grado: raíz doble o sin raíces . 83
29 Inecuaciones racionales 85
30 Inecuaciones racionales comparadas con un número . . . 88
31 Inecuaciones con valor absoluto 91

Examen tipo 1 **94**

Examen tipo 2 **96**

Solucionario **98**

Resumen de reglas **111**

Hoja de seguimiento **112**

Recursos complementarios **113**

Cómo usar este cuaderno

Este cuaderno no es una lista de enunciados con soluciones al final: es una **ruta de práctica**. Cada ficha parte de un ejercicio resuelto en un vídeo del canal y te lleva, paso a paso, a resolver tú solo un ejercicio de examen.

Para quién es

Está pensado para alumnos de **4.º de ESO**, pero empieza desde abajo. Las fichas de cada bloque van **de menos a más difíciles**: las primeras sirven para repasar lo de cursos anteriores y las últimas, igual que los dos exámenes tipo del final, tienen el nivel de un examen de 4.º. Si un bloque lo dominas, empieza por sus últimas fichas; si te cuesta, empieza por el principio.

Qué encontrarás en cada ficha

Cada ficha sigue siempre el mismo camino, y en cada paso tienes un poco menos de ayuda. El icono que va delante de cada ejercicio te dice cuánta ayuda queda: el círculo se va vaciando.

1. ● **Ejercicio resuelto**: el del vídeo, resuelto paso a paso. Escanea el QR del margen para verlo. Debajo del enunciado tienes las **matemáticas que vas a usar**, con un vídeo de repaso para cada una (también en el margen).
2. ◑ **Guiado 1**: mismo método, otros datos. Completa los huecos numerados.
3. ◔ **Guiado 2**: pasos completos para escribir en la cuadrícula de puntos y algunas pistas en forma de pregunta.
4. ○ **Ejercicio de examen**: lo resuelves tú solo en la cuadrícula. Al pie tienes el resultado final **impreso del revés**, para que no lo veas sin querer: gira el cuaderno para comprobarlo.

En el margen de cada ejercicio tienes dos casillas, □ hecho □ repasar: marca «hecho» cuando te salga y «repasar» si quieres volver a él antes del examen. La raya bajo el título también cambia con el tipo de ejercicio (gruesa, fina, de trazos o doble), así que se distinguen aunque imprimas en blanco y negro.

El solucionario

Las respuestas de todos los huecos están en el **solucionario**, al final del libro, con el mismo número de hueco. Cada ficha te dice en qué página están sus respuestas. Inténtalo antes de mirarlas: si te equivocas, vuelve al ejercicio resuelto o al vídeo.

Método de estudio recomendado

- Mira el vídeo del ejercicio resuelto y después léelo tapando cada paso: intenta anticipar el siguiente.
- Si te atascas con algo que deberías saber de antes, usa los vídeos de repaso del margen.
- No mires el solucionario hasta haber intentado el guiado al menos 10 minutos.
- El ejercicio de examen es la prueba de verdad: si te sale, la ficha está dominada.
- Salvo que el enunciado diga otra cosa, intenta hacer las cuentas sin calculadora, como en el examen.

Al final del libro tienes un resumen con las reglas y fórmulas que se usan y una hoja de seguimiento.

BLOQUE 1

Ecuaciones

FICHA 1

Ecuaciones de primer grado con paréntesis y fracciones

Vídeo: «Ecuaciones de primer grado, con fracciones y paréntesis.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 98

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$x - \frac{4x-7}{18} = \frac{2(x-1)}{3} + 1$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Mínimo común múltiplo.** Para el denominador común: m.c.m.(18, 3) = 18.
- **Sumar y restar fracciones.** Para escribir fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Vídeo del ejercicio
«Ecuaciones de primer grado, con fracciones y paréntesis» (desde el minuto 0:50)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-01

Repaso: Mínimo común múltiplo

Repaso: Sumar y restar fracciones

Solución

Los pasos. 1) Quitar paréntesis. 2) Quitar denominadores. 3) Agrupar términos semejantes. 4) Despejar la x.

1. Quitar paréntesis. El 2 multiplica a todo lo de dentro: $2(x-1) = 2x-2$.

$$x - \frac{4x-7}{18} = \frac{2x-2}{3} + 1$$

2. Quitar denominadores. Escribimos todo con el mismo denominador, el m.c.m.(18, 3) = 18. Para cada término se divide el denominador nuevo entre el viejo y se multiplica arriba y abajo por el resultado (así la fracción no cambia). La x y el 1 son como si tuvieran un 1 abajo:

$$\frac{18x}{18} - \frac{4x-7}{18} = \frac{6(2x-2)}{18} + \frac{18}{18}$$

Ahora multiplicamos toda la ecuación por 18 (la ecuación no cambia) y los denominadores se van.

¡Cuidado con el signo menos delante de una fracción! Afecta a todo el numerador, como si hubiera un paréntesis: $-(4x-7) = -4x+7$. Es el error típico.

$$18x - 4x + 7 = 12x - 12 + 18$$

3. Agrupar. Términos con x a un lado y números al otro (lo que suma pasa restando y al revés):

$$18x - 4x - 12x = -12 + 18 - 7 \quad \Rightarrow \quad 2x = -1$$

4. Despejar. El 2 que multiplica pasa dividiendo:

$$x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x-2}{3} = 2$

1. Denominador común. m.c.m.$(2, 3) =$ (1)

$$\frac{3(x+1)}{6} - \frac{\text{(2)}\,(x-2)}{6} = \frac{12}{6}$$

2. Quitamos denominadores (¡cuidado con el menos!).

$$3x + 3 - 2x + \text{(3)} = 12$$

3. Agrupamos y despejamos.

$$x = 12 - 3 - \text{(4)} \quad \Rightarrow \quad x = \text{(5)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{3(x-2)}{4} - \dfrac{2x+1}{6} = x - \dfrac{7}{3}$

1. Quitar paréntesis y denominador común. *Pista: m.c.m.(4, 6, 3) = 12.*

(1)

2. Quitar denominadores. *Pista: el menos delante de la segunda fracción cambia los dos signos de su numerador.*

(2)

3. Agrupar y despejar.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y comprueba la solución:

$$\frac{x-3}{4} - \frac{2(x+1)}{5} = \frac{x}{2} - \frac{3(1-x)}{10}$$

Resultado para comprobar: $5x - 15 - 8x - 8 = 10x - 6 + 6x \iff -19x = 17 \iff x = -\frac{17}{19}$

FICHA 2

Del enunciado a la ecuación: lenguaje algebraico

Vídeo: «Lenguaje Algebraico. Problemas de ecuaciones para principiantes. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 98

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Escribe en lenguaje algebraico: el doble de un número; el triple; la mitad; la cuarta parte; un número par; un número impar; dos números consecutivos.

b) Si al doble de un número se le resta su mitad, da 54. ¿Cuál es el número?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para resolver la ecuación, que tiene una fracción.

Vídeo del ejercicio «Lenguaje algebraico. Problemas de ecuaciones para principiantes» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-02

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

a) Las expresiones básicas. Un problema de ecuaciones consiste en traducir el enunciado, escrito en lenguaje normal, al lenguaje algebraico. Al número que no conocemos (la incógnita) lo llamamos x.

El doble de un número	$2x$
El triple, el cuádruplo...	$3x$, $4x$...
La mitad, la cuarta parte	$\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$
Un número par	$2x$ (por 2 siempre sale par)
Un número impar	$2x+1$ (el siguiente de un par)
Dos números consecutivos	x y $x+1$

b) Planteamiento. La incógnita es lo que nos preguntan: el número, x. «Al doble de un número» es $2x$; «se le resta su mitad», $-\frac{x}{2}$; «da 54», $=54$:

$$2x - \frac{x}{2} = 54$$

b) Resolución. Denominador común 2: $\frac{4x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{108}{2} \Rightarrow 4x - x = 108 \Rightarrow 3x = 108 \Rightarrow x = \frac{108}{3} = 36$

b) Comprobación. El doble de 36 es 72 y su mitad 18: $72 - 18 = 54$. ¡Correcto!

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Si a un número le sumamos su tercera parte, obtenemos 48. ¿Cuál es el número?

1. Planteamiento.

$$x + \underline{\quad (1) \quad} = 48$$

2. Quitamos denominadores.

$$3x + x = \underline{\quad (2) \quad} \quad \Rightarrow \quad 4x = 144$$

3. Solución y comprobación.

$$x = \underline{\quad (3) \quad} \qquad 36 + \frac{36}{3} = 36 + \underline{\quad (4) \quad} = 48$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. La suma de tres números consecutivos es 93. ¿Cuáles son?

1. ¿Cómo se escriben tres números consecutivos?.

(1)

2. Ecuación y resolución.

(2)

3. Los tres números y comprobación.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) La suma de dos números pares consecutivos es 126. ¿Cuáles son?
b) Ana tiene el triple de edad que su hijo. Dentro de 12 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno ahora?

Resultado para comprobar: a) $2x + (2x + 2) = 126 \Rightarrow 62$ y 64 b) $3x + 12 = 2(x + 12) \Rightarrow x = 12$: el hijo tiene 12 años y Ana 36

FICHA 3

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Vídeo: «Aprende matemáticas: Ecuaciones segundo grado incompletas» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 99

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $2x^2 - 8 = 0$ b) $2x^2 + 4x = 0$ c) $8x^2 = 0$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Sacar factor común.** Para el caso en que falta el término independiente.
- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Las incompletas se resuelven casi como una de primer grado.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones segundo grado incompletas» (desde el minuto 2:04) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-03

Repaso: Sacar factor común

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

¿Qué es una incompleta?. La completa es $ax^2 + bx + c = 0$. Si falta algún término ($b = 0$ o $c = 0$, o los dos), es incompleta. Si faltara el término en x^2 ($a = 0$), no sería de segundo grado, sino de primer grado.

a) Falta el término en x ($b = 0$). Se resuelve como una de primer grado: el -8 pasa sumando y el 2 pasa dividiendo.

$$2x^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$$

Y al final un paso más: el cuadrado pasa al otro lado como raíz cuadrada, siempre con $\pm$, porque $2 \cdot 2 = 4$ y también $(-2) \cdot (-2) = 4$.

$$x = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

Aunque sea incompleta, sigue siendo de segundo grado: tiene dos soluciones.

b) Falta el término independiente ($c = 0$). Se saca factor común x (siempre se puede, porque está en los dos términos):

$$x\,(2x + 4) = 0$$

Si un producto da 0, uno de los factores tiene que ser 0 (el 0 solo sale en la tabla del 0). Hay dos posibilidades:

$$x = 0 \qquad \text{o} \qquad 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

En este tipo, una de las soluciones es siempre $x = 0$.

c) Solo queda el término en x^2. Si un número al cuadrado por 8 da 0, ese número tiene que ser 0: $x^2 = \frac{0}{8} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0} = 0$. $x_1 = x_2 = 0$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $3x^2 - 27 = 0$ b) $x^2 - 5x = 0$

1. a).

$$3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = \underline{\quad(1)\quad} \Rightarrow x = \pm \underline{\quad(2)\quad}$$

2. b) Factor común.

$$x\,(\underline{\quad(3)\quad}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $5x^2 + 20 = 0$ b) $4x^2 = 9x$ c) $\dfrac{x^2}{2} - 8 = 0$

1. a). *Pista: ¿qué pasa si te sale un número negativo dentro de la raíz?*

(1)

2. b). *Pista: pásalo todo al mismo lado antes de sacar factor común.*

(2)

3. c).

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Resuelve: $(x-3)(x+3)=7$ y $x(x-6)=3x$

b) El área de un cuadrado es $50\,\text{cm}^2$. ¿Cuánto mide su lado? Da el resultado exacto (con raíces) y aproximado.

Resultado para comprobar: a) $x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$; $x^2-9x=0 \Rightarrow x=0,\ x=9$ b) $l=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\approx 7{,}07$ cm (la solución negativa no sirve)

FICHA 4

Ecuación completa: la fórmula

Vídeo: «Ecuaciones de segundo grado con dos soluciones.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 99

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$3(x-1)+2x^2+1=0$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para quitar paréntesis y agrupar términos, igual que en primer grado.

Vídeo del ejercicio
«Ecuaciones de segundo grado con dos soluciones» (desde el minuto 0:50)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-04

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

1. Ordenar: $ax^2+bx+c=0$. Quitamos paréntesis y agrupamos. Primero x^2, después x y al final el término independiente:

$$3x-3+2x^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2+3x-2=0$$

2. Coeficientes. a es el número que multiplica a x^2; b, el que multiplica a x; c, el que va solo. Con su signo, y sin la x:

$$a=2 \qquad b=3 \qquad c=-2$$

3. La fórmula.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

El $-b$ significa cambiar el signo de b. El $\pm$ indica que hay dos soluciones. Al sustituir un número negativo, se pone entre paréntesis:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}$$

4. Las dos soluciones.

$$x_1=\frac{-3+5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5 \qquad x_2=\frac{-3-5}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $x^2 - 5x + 6 = 0$

1. Coeficientes. $a = 1, \quad b =$ (1) , $\quad c =$ (2)

2. Fórmula.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - \text{(3)}}}{2} = \frac{5 \pm \text{(4)}}{2}$$

3. Soluciones.

$$x_1 = \text{(5)} \qquad x_2 = \text{(6)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $x(x + 2) = 3(2x + 4)$

1. Ordenar.

(1)

2. Coeficientes y fórmula. *Pista: cuidado con el signo de b y de c.*

(2)

3. Soluciones.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Resuelve: $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{2} = \dfrac{x+4}{6}$

b) El producto de dos números consecutivos es 132. ¿Cuáles son?

Resultado para comprobar: a) $2x^2 - 3x = x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$ b) $x(x+1) = 132$: 11 y 12, o bien −12 y −11

FICHA 5

Solución doble y ecuaciones sin solución

Vídeo: «Ecuaciones de segundo grado con una solución doble.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 99

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$4x - 2(3x + 2) + 3 = x^2$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de segundo grado.** La fórmula de la ecuación de segundo grado.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones de segundo grado con una solución doble» (desde el minuto 0:50)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-05

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

1. Ordenar. Quitamos el paréntesis (menos por más, menos): $4x - 6x - 4 + 3 = x^2$. El x^2, que está sumando a la derecha, pasa restando:

$$-x^2 - 2x - 1 = 0$$

2. Cambiar todos los signos (opcional). Se puede trabajar con a negativo, pero como los tres términos son negativos, multiplicamos toda la ecuación por -1 (las soluciones no cambian) y así hay menos riesgo de equivocarse:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad a = 1,\ b = 2,\ c = 1$$

3. Fórmula.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

4. Dos soluciones iguales. Como la raíz vale 0, con el + y con el − sale lo mismo:

$$x_1 = x_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

No es que haya «una sola solución»: hay dos soluciones iguales (una solución doble). La diferencia importa al factorizar: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$, dos factores.

Si lo de dentro de la raíz saliera negativo, la ecuación no tendría soluciones reales.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $x^2 - 6x + 9 = 0$

1. Fórmula.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - \text{(1)}}}{2} = \frac{6 \pm \text{(2)}}{2}$$

2. Soluciones.

$x_1 = x_2 =$ (3) $\qquad x^2 - 6x + 9 = (\text{(4)})^2$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve, si es posible: a) $3x^2 + 2x + 2 = 2x^2$ b) $4x^2 + 1 = 4x$

1. a) Ordena y aplica la fórmula. *Pista: mira el signo de lo que queda dentro de la raíz.*

(1)

2. b).

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Sin resolverlas, di cuántas soluciones reales tienen: $x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 - 10x + 25 = 0$; $2x^2 - x - 3 = 0$.

b) Halla el valor de k para que $x^2 + kx + 16 = 0$ tenga una solución doble ($k > 0$). ¿Cuál es esa solución?

Resultado para comprobar: a) $\Delta = -3 < 0$: ninguna; $\Delta = 0$: una doble; $\Delta = 25 > 0$: dos
b) $k^2 - 64 = 0 \Rightarrow k = 8$; $x = -4$ (doble)

FICHA 6

Ecuaciones bicuadradas: cambio de variable

Vídeo: «Ecuaciones bicuadradas. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 100

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ c) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Ecuaciones de segundo grado.** Tras el cambio de variable queda una ecuación de segundo grado.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones bicuadradas» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-06

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

1. ¿Qué es una bicuadrada?. Una ecuación de cuarto grado con solo los términos pares: x^4, x^2 y el independiente (no tiene x^3 ni x). Se podría hacer por Ruffini, que es un método de tanteo, pero hay un método más rápido: un **cambio de variable**.

2. a) Cambio de variable. Llamamos $z = x^2$; entonces $x^4 = z^2$. La ecuación queda de segundo grado en z:

$$z^2 - 13z + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$z_1 = 9, \qquad z_2 = 4$$

3. a) Deshacer el cambio. Eso no es la solución: nos piden la x. Como $x^2 = z$, se hace la raíz cuadrada de cada z, con $\pm$:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \qquad x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Cuatro soluciones (es de cuarto grado): 3, −3, 2 y −2.

4. b) Igual. $z = x^2$: $z^2 - 10z + 9 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \dfrac{10 \pm 8}{2} \Rightarrow$ $z_1 = 9$, $z_2 = 1$.

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Aquí han salido cuatro soluciones reales, pero si alguna z fuera negativa su raíz no sería real y habría menos soluciones (o ninguna).

5. c) La misma idea con otros exponentes. Sirve para cualquier ecuación con solo dos potencias de x en la que un exponente es el doble del otro. Aquí $z = x^3$ y $x^6 = z^2$:

$$z^2 - 7z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1 = 6,\ z_2 = 1$$

Ahora $x^3 = z$, así que se hace la raíz **cúbica**, y sin ± (solo se pone en las raíces de índice par):

$$x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6} \qquad x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

1. Cambio $z = x^2$.

$$z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - \text{(1)}}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow z_1 = \text{(2)},\ z_2 = \text{(3)}$$

2. Deshacemos el cambio.

$$x = \pm\sqrt{4} = \text{(4)} \qquad x = \pm\sqrt{1} = \text{(5)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ b) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

1. a). *Pista: una de las z sale negativa: ¿qué pasa al hacer su raíz?*

(1)

2. b).

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Resuelve: $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

b) Resuelve: $(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 4$

Resultado para comprobar: a) $z = 4$ y $z = \frac{1}{4}$: $x = \pm 2$, $x = \pm\frac{1}{2}$ b) $x^4 - x^2 - 6 = 0$: $z = 3$ ($z = -2$ no da soluciones reales): $x = \pm\sqrt{3}$

FICHA 7

Ecuaciones de grado 3 y 4 por Ruffini

Vídeo: «Ecuaciones de grado superior a dos. Todosobresaliente.com» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 100

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y factoriza: a) $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$ b) $x^3 - x^2 - 4 = 0$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Factorizar polinomios con Ruffini.** El método para buscar las soluciones enteras.
- **Ecuaciones de segundo grado.** Para acabar cuando queda un polinomio de segundo grado.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones de grado superior a dos» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-07

Repaso: Factorizar polinomios con Ruffini

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

1. a) Las posibles soluciones. Salvo casos especiales (como las bicuadradas), las ecuaciones de grado mayor que 2 se resuelven por Ruffini. Las soluciones enteras, si las hay, están entre los **divisores del término independiente**: ±1, ±2, ±3, ±6.

2. a) Ruffini con $x = 1$. Se ponen los coeficientes (si faltara alguno, se pondría un 0). Se baja el primero; se multiplica en diagonal y se suma en vertical:

	2	1	−8	−1	6
1		2	3	−5	−6
	2	3	−5	−6	0

El resto es 0: $x_1 = 1$ es solución. Queda $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$, y ya tenemos el primer factor, $(x - 1)$.

3. a) Seguimos con lo que queda. Probamos otra vez 1 (una solución puede repetirse): el resto sale −6, no vale. Probamos −1:

	2	3	−5	−6
−1		−2	−1	6
	2	1	−6	0

$x_2 = -1$. Queda $2x^2 + x - 6 = 0$, que ya es de segundo grado: fórmula.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = -2$$

4. a) Factorizada. Cada solución r da un factor $(x - r)$. Y no hay que olvidar el coeficiente de la x de mayor grado, el 2:

$$2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 2\,(x - 1)(x + 1)(x + 2)\left(x - \tfrac{3}{2}\right)$$

5. b) Falta el término en x: un 0. Divisores de -4: ±1, ±2, ±4. Con 1 el resto sale -4. Probamos con 2:

	1	−1	0	−4
2		2	2	4
	1	1	2	0

$x_1 = 2$. Queda $x^2 + x + 2 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

La raíz de un número negativo no es real: esas dos soluciones no son reales. La única solución real es $x = 2$, y la factorización queda $(x-2)(x^2+x+2)$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y factoriza: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

1. Posibles soluciones. Divisores de 6: _____(1)_____

2. Ruffini con $x = 1$.

	1	−2	−5	6
1		1	(2)	(3)
	1	−1	−6	0

3. Lo que queda.

$$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_2 = \text{(4)},\ x_3 = \text{(5)}$$

4. Factorizada.

$$(x-1)\ \text{(6)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y factoriza: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$

1. Primera solución por Ruffini. *Pista: prueba con -1.*

(1)

2. Segunda solución. *Pista: vuelve a probar el mismo número.*

(2)

3. Lo que queda y factorización.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y factoriza: a) $x^3-7x-6=0$ b) $2x^3-3x^2-3x+2=0$

Resultado para comprobar: a) $x=-1,\ -2,\ 3$: $(x+1)(x+2)(x-3)$ b) $x=-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$: $2(x+1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

FICHA 8

Si falta el término independiente: factor común

Vídeo: «Ecuaciones de grado superior a dos. Todosobresaliente.com» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 100

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y factoriza:

$$x^4 + 12x^3 - 64x^2 = 0$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Sacar factor común.** Para sacar x^2 factor común.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones de grado superior a dos» (desde el minuto 18:34)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-08

Repaso: Sacar factor común

Solución

1. ¿Ruffini con ceros?. Faltan el término en x y el independiente. Se podría hacer Ruffini poniendo ceros, pero el único divisor de 0 es 0, y al hacerlo solo conseguimos quitar una x cada vez: es perder el tiempo.

2. Mejor: sacar factor común. Todos los términos tienen x; de hecho tienen x^2:

$$x^4 + 12x^3 - 64x^2 = x\,(x^3 + 12x^2 - 64x) = x^2\,(x^2 + 12x - 64) = 0$$

Cada x que sacamos factor común es una solución $x = 0$ (es el factor $x - 0$). Como sacamos dos, $x_1 = x_2 = 0$.

3. Lo que queda: segundo grado.

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 256}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{400}}{2} = \frac{-12 \pm 20}{2}$$

$$x_3 = -16, \qquad x_4 = 4$$

4. Factorizada.

$$x^2\,(x + 16)(x - 4) = 0$$

El coeficiente de x^4 es 1, así que no hace falta añadir nada delante.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $x^3 - 9x = 0$

1. Factor común.

$$x\,(\ \text{(1)}\ ) = 0$$

2. Soluciones.

$x_1 =$ (2) $\qquad x^2 = 9 \Rightarrow x =$ (3)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y factoriza: $2x^5 - 2x^4 - 4x^3 = 0$

1. ¿Qué puedes sacar factor común?. *Pista: fíjate en los números y en las x.*

(1)

2. Soluciones.

(2)

3. Factorizada.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 = 0$ b) $x^4 - 16x^2 = 0$ c) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$

Resultado para comprobar: a) $x^2(x-1)(x-4)$: 0 (doble), 1, 4 b) $x^2(x-4)(x+4)$: 0 (doble), ± 4 c) $x(x^4 - 5x^2 + 4) = 0$: 0, ± 1, ± 2

FICHA 9

Ecuaciones con la x en el denominador

Vídeo: «Ecuaciones Racionales o Fraccionarias. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 101

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x+1}=1$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x^2-4}$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **m.c.m. de polinomios.** Para el denominador común de los polinomios.
- **Identidades notables.** Para factorizar x^2-4 como suma por diferencia.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones racionales o fraccionarias» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-09

Repaso: m.c.m. de polinomios

Repaso: Identidades notables

Solución

a) Factorizar y m.c.m.. Los pasos son los de siempre (denominador común y quitar denominadores), pero con polinomios. $x^2+x=x\,(x+1)$ sacando factor común; $x+1$ ya está factorizado. m.c.m. $=x\,(x+1)$.

a) Denominador común. Lo que se añade abajo se añade arriba: en la primera no se añade nada; en la segunda se añade x; en el 1, todo:

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{x(x+1)}{x(x+1)} \quad\Rightarrow\quad 1+x=x^2+x$$

$$x^2=1 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 1$$

a) ¡Hay que comprobar!. Son **posibles** soluciones: no se puede dividir entre 0, y si alguna anula un denominador de la ecuación inicial, no vale.

- $x=1$: $x^2+x=2\neq 0$; $x+1=2\neq 0$. Válida.
- $x=-1$: $x+1=0$. **No vale**.

La única solución es $x=1$.

b) Factorizar y m.c.m.. x^2-4 es una diferencia de cuadrados: $(x+2)(x-2)$. m.c.m. $=(x+2)(x-2)$.

b) Quitar denominadores.

$$\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

$$x+2+x-2=1 \quad\Rightarrow\quad 2x=1 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{2}$$

b) Comprobación. Aunque haya una sola solución, se comprueba: $\frac{1}{2}-2\neq 0$, $\frac{1}{2}+2\neq 0$, $\frac{1}{4}-4\neq 0$. La solución es $x=\frac{1}{2}$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1} = 2$

1. m.c.m. y quitar denominadores. m.c.m. $= x\,(x-1)$:

$$2(x-1) + \underline{\ (1)\ } = 2x(x-1) \implies 3x - 2 = 2x^2 - 2x \implies 2x^2 - \underline{\ (2)\ } + 2 = 0$$

2. Resolvemos.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \implies x_1 = \underline{\ (3)\ },\ x_2 = \underline{\ (4)\ }$$

3. Comprobación. ¿Anulan algún denominador (x o $x-1$)? ____(5)____

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{18}{x^2-9}$

1. Factorizar y m.c.m..

(1)

2. Quitar denominadores y resolver. *Pista: cuidado con el signo menos delante de la segunda fracción.*

(2)

3. Comprobación. *Pista: ¿alguna de las soluciones hace 0 algún denominador?*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve y comprueba: a) $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{5}{6}$ b) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{4}{x^2-1}$

Resultado para comprobar: a) $6(x+1)^2 - 6x^2 = 5x(x+1) \Rightarrow 5x^2 - 7x - 6 = 0$: $x = 2$, $x = -\frac{3}{5}$ (las dos válidas) b) $3(x+1) - 2(x-1) = 4 \Rightarrow x = -1$: anula $x+1$, **no tiene solución**

FICHA 10

Ecuaciones con una raíz

Vídeo: «Ecuaciones irracionales o radicales. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 101

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$\sqrt{2x-3} - x = -1$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Identidades notables.** Para elevar al cuadrado $(x-1)^2$ correctamente.
- **Ecuaciones de segundo grado.** La ecuación que queda es de segundo grado.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones irracionales o radicales» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-10

Repaso: Identidades notables

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

1. Aislar la raíz. Dejamos la raíz sola en un lado: la $-x$ pasa sumando.

$$\sqrt{2x-3} = x - 1$$

2. Elevar al cuadrado. Elevamos los dos miembros al cuadrado; el cuadrado cancela la raíz. **¡Cuidado!** $(x-1)^2$ es una identidad notable, no $x^2 - 1$: es el error típico.

$$2x - 3 = x^2 - 2x + 1$$

3. Resolver.

$$-x^2 + 4x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2} = 2 \text{ (doble)}$$

4. Comprobar: es obligatorio. Elevar al cuadrado puede introducir soluciones falsas: de $x = 2$ sale $x^2 = 4$, que tiene también $x = -2$. Por eso hay que sustituir en la ecuación inicial:

$$\sqrt{2 \cdot 2 - 3} - 2 = \sqrt{1} - 2 = 1 - 2 = -1 \checkmark$$

Sale algo cierto ($-1 = -1$): la solución es $x = 2$. Si saliera algo falso (como $8 = 4$), esa solución se tacharía.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\sqrt{x+7} = x+1$

1. Elevar al cuadrado.

$$x + 7 = x^2 + \underline{\quad(1)\quad} + 1 \implies x^2 + x - \underline{\quad(2)\quad} = 0$$

2. Resolver.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \implies x_1 = \underline{\quad(3)\quad},\ x_2 = \underline{\quad(4)\quad}$$

3. Comprobar. $x = 2$: $\sqrt{9} = 3$ ✓ $\quad x = -3$: $\sqrt{4} = 2 \neq -2$. Solución: $\underline{\quad(5)\quad}$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

1. Aislar la raíz y elevar al cuadrado.

(1)

2. Resolver.

(2)

3. Comprobar.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y comprueba: a) $2x-\sqrt{x+1}=1$ b) $\sqrt{3x+4}+2=x$

Resultado para comprobar: a) $4x^2-5x=0$: $x=\frac{5}{4}$ válida; $x=0$ falsa b) $x^2-7x=0$: $x=7$ válida; $x=0$ falsa

FICHA 11

Ecuaciones con dos raíces

Vídeo: «Ecuaciones irracionales o radicales. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 101

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-4} = 2$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Identidades notables.** Al elevar al cuadrado $\left(2 - \sqrt{x-4}\right)^2$ aparece el doble producto.

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones irracionales o radicales» (desde el minuto 8:14)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-11

Repaso: Identidades notables

Solución

1. Aislar una de las raíces. Se hace igual, pero dos veces. Dejamos sola la primera:

$$\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x-4}$$

2. Elevar al cuadrado. A la derecha hay una identidad notable: primero al cuadrado, más segundo al cuadrado, **menos el doble del primero por el segundo** (lo que se suele olvidar):

$$x = 4 + (x-4) - 4\sqrt{x-4} \quad \Rightarrow \quad x = x - 4\sqrt{x-4} \quad \Rightarrow \quad 0 = -4\sqrt{x-4}$$

Ha vuelto a aparecer una raíz: repetimos los pasos desde el principio.

3. Aislar y elevar otra vez.

$$\sqrt{x-4} = \frac{0}{-4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

4. Comprobar.

$$\sqrt{4} + \sqrt{4-4} = 2 + 0 = 2 \checkmark$$

La solución es $x = 4$. Si hubiera tres raíces, se repetiría el proceso las veces que hiciera falta.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

1. Aislar y elevar.

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x + 5 = 1 + x + \underline{\quad(1)\quad}$$

2. Aislar la raíz que queda.

$$4 = 2\sqrt{x} \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = \underline{\quad(2)\quad} \;\Rightarrow\; x = \underline{\quad(3)\quad}$$

3. Comprobar.

$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = \underline{\quad(4)\quad} \;\checkmark$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

1. Primer cuadrado.

(1)

2. Segundo cuadrado y ecuación.

(2)

3. Comprobar.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y comprueba: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$

Resultado para comprobar: $\sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x=5$; comprobación: $3+2=5$ ✓

FICHA 12

Ecuaciones con valor absoluto

Vídeo: «Valor absoluto en ecuaciones. Todosobresaliente.com» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 102

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $|2x-4|-6=0$ b) $|3x-2|+5x-6=0$ c) $7-2x+|3x-3|=0$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Cada caso da una ecuación de primer grado.

Solución

1. ¿Qué es el valor absoluto?. Es el valor del número sin su signo: $|8|=8$ y $|-8|=8$. Si lo de dentro es positivo, lo deja igual; si es negativo, lo pone positivo. Por eso $|x|=8$ tiene dos soluciones: $x=8$ y $x=-8$.

2. a) Aislar el valor absoluto y separar en dos casos.

$$|2x-4|=6 \quad \Rightarrow \quad 2x-4=6 \quad \text{o} \quad 2x-4=-6$$

$$2x=10 \Rightarrow x=5 \qquad 2x=-2 \Rightarrow x=-1$$

3. a) Comprobar. Hay que comprobar siempre, porque al separar en dos casos suponemos que lo de dentro es positivo o negativo, y la ecuación no lo sabe.

$x=5:\ |10-4|-6=6-6=0\ \checkmark \qquad x=-1:\ |-2-4|-6=6-6=0\ \checkmark$

Las dos son válidas.

4. b). $|3x-2|=6-5x$. Lo de dentro es lo de la derecha o lo de la derecha cambiado de signo:

$$3x-2=6-5x \Rightarrow 8x=8 \Rightarrow x=1$$

$$3x-2=-6+5x \Rightarrow -2x=-4 \Rightarrow x=2$$

Comprobamos: $x=1$: $|1|+5-6=0\ \checkmark$. $x=2$: $|4|+10-6=8\neq 0$: **falsa**. La solución es $x=1$.

5. c). $|3x-3|=2x-7$:

$$3x-3=2x-7 \Rightarrow x=-4 \qquad 3x-3=-2x+7 \Rightarrow 5x=10 \Rightarrow x=2$$

Comprobamos: $x=2$: $7-4+|3|=6\neq 0$. $x=-4$: $7+8+|-15|=30\neq 0$. Ninguna vale: **la ecuación no tiene solución**. No nos hemos equivocado: no hay ningún valor de x que la cumpla.

Vídeo del ejercicio «Valor absoluto en ecuaciones» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-12

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $|x+3| = 5$

1. Dos casos.

$x + 3 = 5 \Rightarrow x =$ (1) $\qquad x + 3 =$ (2) $\Rightarrow x =$ (3)

2. Comprobación.

$|2 + 3| =$ (4) ✓ $\qquad | -8 + 3| = | -5| = 5$ ✓

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $|2x - 1| = x + 4$

1. Los dos casos.

(1)

2. Comprobación. *Pista: sustituye en la ecuación inicial, con el valor absoluto.*

(2)

◯ Ejercicio de examen

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y comprueba: a) $|5-2x|-3=0$ b) $|x-1| = 3x+5$ c) $|x+2|+4=0$

Resultado para comprobar: a) $x = 1$ y $x = 4$ b) $x = -1$ ($x = -3$ es falsa) c) Sin solución: un valor absoluto nunca es negativo

FICHA 13

Problemas de obreros y grifos con ecuaciones

Vídeo: «Problemas ecuaciones, obreros y grifos. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 102

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Un obrero tarda 8 horas en hacer un trabajo y otro tarda 6 horas. ¿Cuánto tardan los dos juntos?

b) Dos obreros juntos tardan 14 horas en terminar un trabajo. Uno es el doble de rápido que el otro. ¿Cuánto tardaría cada uno por separado?

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Problemas con fracciones.** Es el mismo tipo de problema resuelto con velocidades: aquí se plantea con una ecuación.
- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Para resolver la ecuación con fracciones.

Vídeo del ejercicio
«Problemas ecuaciones, obreros y grifos» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-13

Repaso: Problemas con fracciones

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

Nota sobre el redondeo: *en el vídeo el resultado del apartado a) se da como 3,4 horas; aquí se da con dos decimales: 3,43 h.*

1. a) ¿Se suman los tiempos? No: 8 + 6 = 14 horas es imposible, juntos tienen que tardar **menos** que cada uno. Pensamos en la velocidad de trabajo: el primero hace 1 trabajo cada 8 horas ($\frac{1}{8}$ por hora) y el segundo $\frac{1}{6}$ por hora.

2. a) La ecuación. Velocidad por tiempo es la parte del trabajo hecha (como velocidad por tiempo es distancia). Los dos trabajan el mismo tiempo x y entre los dos hacen 1 trabajo completo:

$$\frac{1}{8}x + \frac{1}{6}x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{24} + \frac{4x}{24} = \frac{24}{24}$$

$$7x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24}{7} = 3{,}43 \text{ h}$$

Tiene sentido: menos que 6 horas.

3. b) Ahora no sabemos las velocidades. El tiempo lo sabemos (14 h). Si la velocidad del lento es x, la del rápido es $2x$:

$$14x + 2x \cdot 14 = 1 \quad \Rightarrow \quad 42x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{42}$$

El lento hace un trabajo cada 42 horas, y el rápido $2 \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{21}$, uno cada 21 horas.

Solución: uno tardaría 42 horas y el otro 21 horas. Hay que escribir la respuesta con palabras: $\frac{1}{42}$ no responde a la pregunta.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Un grifo llena un depósito en 3 horas y otro grifo en la mitad de tiempo. ¿Cuánto tardan los dos juntos?

1. Velocidades. El primero: $\frac{1}{3}$ de depósito por hora. El segundo lo llena en __(1)__ h, es decir, 2 depósitos cada 3 horas: __(2)__

2. Ecuación.

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{3} = 1 \implies 3x = \text{(3)} \implies x = \text{(4)}$$

3. Solución con palabras. Los dos juntos tardan __(5)__.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Dos impresoras juntas imprimen un pedido en 4 horas. La más lenta, sola, tardaría 12 horas. ¿Cuánto tardaría la más rápida sola?

1. Ecuación. *Pista: llama x a las horas que tarda la rápida: su velocidad es $\frac{1}{x}$.*

(1)

2. Resolución.

(2)

3. Solución con palabras.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Para vaciar una piscina hay dos bombas. La bomba A, sola, la vacía en 10 horas. Si se usan las dos a la vez, se vacía en 6 horas.

a) ¿Cuánto tardaría la bomba B sola?
b) Si la bomba A funciona sola durante 4 horas y después se enciende también la B, ¿cuánto tiempo más hace falta para vaciarla?

Resultado para comprobar: a) $\frac{1}{10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\Rightarrow x=15$ horas b) A vacía $\frac{4}{10}$; quedan $\frac{3}{5}$: $\frac{1}{6}t=\frac{3}{5}\Rightarrow t=3{,}6$ h (3 h 36 min)

FICHA 14

Ecuaciones exponenciales: potencias de igual base

Vídeo: «Ecuaciones exponenciales #1. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 102

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $2^{x+1} = 4$ b) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 28$ c) $\sqrt[2x-1]{3^{x-3}} = \sqrt{27}$

Vídeo del ejercicio «Ecuaciones exponenciales #1» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-14

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Para escribir $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ y $2^{x-1} = \frac{2^x}{2}$.
- **Sacar factor común.** Para sacar 2^x factor común.

Repaso: Propiedades de las potencias

Repaso: Sacar factor común

Solución

1. ¿Qué es una ecuación exponencial?. La incógnita está en el exponente. Método: escribir los dos miembros como **potencias de la misma base**. Si las bases son iguales, para que haya igualdad los exponentes también tienen que ser iguales.

2. a). $4 = 2^2$: $2^{x+1} = 2^2 \Rightarrow x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$. Comprobación: $2^{1+1} = 4$ ✓

3. b) Primero ordenar: factor común. Así no se puede. Pero un exponente que suma viene de un producto de potencias de igual base: $2^{x+1} = 2^x \cdot 2$ y $2^{x-1} = 2^x \cdot 2^{-1} = 2^x \cdot \frac{1}{2}$.

$$2^x \cdot 2 + 2^x + 2^x \cdot \frac{1}{2} = 28 \quad \Rightarrow \quad 2^x \left(2 + 1 + \frac{1}{2}\right) = 28 \quad \Rightarrow \quad 2^x \cdot \frac{7}{2} = 28$$

$$2^x = \frac{28 \cdot 2}{7} = 8 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

4. c) La x en el índice de una raíz. Una raíz es una potencia de exponente fraccionario: lo de dentro arriba y el índice abajo. Y $27 = 3^3$:

$$3^{\frac{x-3}{2x-1}} = 3^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{2x-1} = \frac{3}{2}$$

5. c) Resolver. Multiplicamos en cruz:

$$2(x-3) = 3(2x-1) \Rightarrow 2x - 6 = 6x - 3 \Rightarrow -4x = 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

¡Cuidado! El -4 multiplica, así que pasa dividiendo **con su signo**: no se le cambia el signo.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $3^{x-2} = 27$ b) $5^{2x} = \dfrac{1}{25}$

1. a).

$$3^{x-2} = 3^{\text{(1)}} \Rightarrow x - 2 = 3 \Rightarrow x = \text{(2)}$$

2. b).

$$\frac{1}{25} = 5^{\text{(3)}} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = \text{(4)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $3^{x+1} + 3^x = 108$

1. Factor común. *Pista:* $3^{x+1} = 3^x \cdot 3$.

(1)

2. Despejar la potencia.

(2)

3. Misma base.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $4^x = 8^{x-1}$ b) $2^{x+2} - 2^{x-1} = 56$ c) $9^x = \sqrt{3}$

Resultado para comprobar: a) $2^{2x} = 2^{3x-3} \Rightarrow x = 3$ b) $2^x\left(4 - \frac{1}{2}\right) = 56 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4$ c) $3^{2x} = 3^{1/2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

FICHA 15

Qué es un logaritmo: calcular logaritmos

Vídeo: «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo. 4.º ESO» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 103

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Calcula sin calculadora:

$$\log 100 \quad \log 1000 \quad \log_2 8 \quad \log_5 125 \quad \log_{1/5} 25 \quad \log_2 64 \quad \log_{\sqrt{2}} 8$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Exponentes negativos y fraccionarios: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2$ y $\sqrt{2} = 2^{1/2}$.
- **Descomponer en factores primos.** Para escribir el número como potencia de la base.

Vídeo del ejercicio «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo» (desde el principio y desde el minuto 7:55)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-15

Repaso: Propiedades de las potencias

Repaso: Descomponer en factores primos

Solución

1. La definición.

$$\log_a x = n \iff a^n = x$$

El logaritmo responde a: **¿a qué número tengo que elevar la base para que me dé x?** Si no se escribe la base, es 10 (logaritmo decimal).

$$\log 100 = 2 \text{ porque } 10^2 = 100 \qquad \log 1000 = 3 \text{ porque } 10^3 = 1000$$

$$\log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 8$$

2. $\log_5 125$**: descomponer en factores primos.** $125 = 5^3$, así que $\log_5 5^3$: ¿a qué tengo que elevar 5 para que me dé 5^3? A 3. $\log_5 125 = 3$.

3. $\log_{1/5} 25$**: la base es una fracción.** $25 = 5^2$. Por la definición, $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^2$. Para dar la vuelta a la fracción se usa un exponente negativo: $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2$. Así que $\log_{1/5} 25 = -2$.

4. $\log_2 64$. $64 = 2^6$: $\log_2 64 = 6$.

5. $\log_{\sqrt{2}} 8$**: la base es una raíz.** $8 = 2^3$. Por la definición, $\left(\sqrt{2}\right)^x = 2^3$. No tenemos la misma base, pero $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ y en la potencia de una potencia se multiplican los exponentes:

$$\left(2^{1/2}\right)^x = 2^3 \Rightarrow 2^{x/2} = 2^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$$

$\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$. El método: descomponer, escribir las dos potencias con la misma base e igualar los exponentes.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula: $\log_3 81$; $\log 0{,}01$; $\log_{1/2} 8$

1. $\log_3 81$.

$$81 = 3^{\text{(1)}} \Rightarrow \log_3 81 = \text{(2)}$$

2. $\log 0{,}01$.

$$0{,}01 = 10^{\text{(3)}} \Rightarrow \log 0{,}01 = \text{(4)}$$

3. $\log_{1/2} 8$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 2^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\text{(5)}} = 2^3 \Rightarrow \log_{1/2} 8 = \text{(6)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Calcula: a) $\log_{\sqrt{3}} 9$ b) $\log_2 \dfrac{1}{32}$ c) $\log_4 8$

1. a). *Pista:* $\sqrt{3} = 3^{1/2}$.

(1)

2. b).

(2)

3. c). *Pista: escribe 4 y 8 como potencias de 2.*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Calcula sin calculadora: a) $\log_2 \sqrt{8}$ b) $\log_{1/3} 27$ c) $\log 0{,}001 + \log_5 \frac{1}{25} - \log_7 1$

Resultado para comprobar: a) $\frac{3}{2}$ b) -3 c) $-3 + (-2) - 0 = -5$

FICHA 16

Logaritmos: calcular la base o el número

Vídeo: «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo. 4.º ESO» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 103

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla el valor de a o de y:

a) $\log_a 49 = 2$; $\log_a 16 = -4$; $\log_a \frac{1}{25} = 2$; $\log_a \sqrt{7} = 2$
b) $\log_2 y = 5$; $\log_{1/2} y = 4$; $\log_6 y = -2$; $\log_{\sqrt{3}} y = 6$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Propiedades de las potencias.** Para igualar las potencias: mismo exponente, misma base.

Vídeo del ejercicio
«Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo» (desde el minuto 19:50)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-16

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

a) La incógnita es la base. Se aplica la definición y se buscan potencias con el mismo exponente; entonces las bases tienen que ser iguales.

$$a^2 = 49 = 7^2 \Rightarrow a = 7$$

$$a^{-4} = 16 = 2^4 \Rightarrow \frac{1}{a^4} = 2^4 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^4 = 2^4 \Rightarrow \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

(el 1 de arriba es lo mismo que 1^2, así que el cuadrado se puede poner fuera del paréntesis).

a) $\log_a \sqrt{7} = 2$. $a^2 = \sqrt{7} = 7^{1/2}$. Para tener el mismo exponente, escribimos $a^2 = \left(a^4\right)^{1/2}$ (porque $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$):

$$\left(a^4\right)^{1/2} = 7^{1/2} \;\Rightarrow\; a^4 = 7 \;\Rightarrow\; a = \sqrt[4]{7} = 7^{1/4}$$

Comprobación: $\left(7^{1/4}\right)^2 = 7^{1/2} = \sqrt{7}$ ✓

b) La incógnita es el número: el caso más fácil. Solo hay que calcular una potencia:

$$y = 2^5 = 32 \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \qquad y = 6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$y = \left(\sqrt{3}\right)^6 = 3^{6/2} = 3^3 = 27$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla a o y: a) $\log_a 125 = 3$ b) $\log_3 y = -2$ c) $\log_a 4 = -2$

1. a).

$$a^3 = 125 = \underline{\quad(1)\quad}^{\,3} \Rightarrow a = \underline{\quad(2)\quad}$$

2. b).

$$y = 3^{-2} = \underline{\quad(3)\quad}$$

3. c).

$$a^{-2} = 2^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow a = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Halla a o y: a) $\log_a 8 = \frac{3}{2}$ b) $\log_{\sqrt{2}} y = 4$ c) $\log_a \frac{1}{27} = 3$

1. a). *Pista: $a^{3/2} = 2^3$: busca un exponente que multiplicado por $\frac{3}{2}$ dé 3.*

(1)

2. b).

(2)

3. c).

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Halla el valor de la incógnita: a) $\log_x 0{,}0001 = -4$ b) $\log_{2/3} y = -2$ c) $\log_a \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$

Resultado para comprobar: a) $x = 10$ b) $y = \frac{9}{4}$ c) $a = 5$

FICHA 17

Propiedades de los logaritmos

Vídeo: «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo. 4.º ESO» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 103

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Escribe como un solo logaritmo: $\log 3 + \log 5$; $\log 8 - \log 4$. Escribe sin exponente: $\log 2^3$.

b) Escribe $\log_2 10$ como un cociente de logaritmos que se pueda calcular con la calculadora.

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Propiedades de las potencias.** Las propiedades de los logaritmos vienen de las de las potencias.

Vídeo del ejercicio «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo» (desde el minuto 1:31)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-17

Repaso: Propiedades de las potencias

Solución

a) Las tres propiedades. La suma de logaritmos es el logaritmo del producto; la resta, el logaritmo del cociente; y el exponente pasa delante multiplicando:

$$\log a + \log b = \log(a \cdot b) \qquad \log a - \log b = \log \frac{a}{b} \qquad \log a^b = b \cdot \log a$$

$$\log 3 + \log 5 = \log 15 \qquad \log 8 - \log 4 = \log \frac{8}{4} = \log 2$$

$$\log 2^3 = 3 \log 2$$

Se pueden comprobar con la calculadora. Sirven para simplificar y para resolver ecuaciones.

b) Cambio de base. La calculadora solo tiene logaritmos en base 10 (log) y en base e (neperiano, ln). Para otra base:

$$\log_a b = \frac{\log_x b}{\log_x a} \qquad \Rightarrow \qquad \log_2 10 = \frac{\ln 10}{\ln 2} = \frac{\log 10}{\log 2}$$

Arriba va el número del logaritmo y abajo su base; la base nueva puede ser la que queramos. Con la calculadora: $\log_2 10 \approx 3{,}32$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe como un solo logaritmo: $\log 6 + \log 5 - \log 3$ y $2\log 5 + \log 4$. Calcula el segundo.

1. Primero.

$$\log 6 + \log 5 - \log 3 = \log \frac{6 \cdot 5}{\text{(1)}} = \log \text{__(2)__}$$

2. Segundo.

$$2\log 5 + \log 4 = \log 5^{\text{(3)}} + \log 4 = \log(25 \cdot 4) = \log \text{__(4)__} = \text{__(5)__}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y $\log 3 \approx 0{,}477$, calcula sin calculadora: a) $\log 6$ b) $\log 1{,}5$ c) $\log 8$ d) $\log_2 3$

1. a) y b). *Pista:* $6 = 2 \cdot 3$ *y* $1{,}5 = \frac{3}{2}$.

(1)

2. c) y d). *Pista: para d), cambio de base.*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$, calcula $\log 5$, $\log 40$ y $\log \sqrt{2}$. (Pista: $5 = \frac{10}{2}$.)

b) Escribe como un solo logaritmo y simplifica: $3\log x + \log y - 2\log z$.

Resultado para comprobar: a) $\log 5 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$; $\log 40 = 2\log 2 + 1 = 1{,}602$; $\log \sqrt{2} = 0{,}1505$ b) $\log \frac{x^3 y}{z^2}$

FICHA 18

Ecuaciones logarítmicas

Vídeo: «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo. 4.º ESO» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 104

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$\log 2 + \log(11 - x^2) = 2\log(5 - x)$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Identidades notables.** Para desarrollar $(5 - x)^2$.
- **Ecuaciones de segundo grado.** Al quitar los logaritmos queda una ecuación de segundo grado.

Vídeo del ejercicio
«Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo» (desde el minuto 32:45)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-18

Repaso: Identidades notables

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

1. Un solo logaritmo a cada lado. La idea es quitar los logaritmos. Para eso dejamos un solo logaritmo en cada lado con las propiedades: a la izquierda, la suma es el logaritmo del producto; a la derecha, el 2 pasa a ser exponente.

$$\log\left[2\,(11 - x^2)\right] = \log(5 - x)^2$$

2. Quitar los logaritmos. Si los logaritmos (de la misma base) son iguales, lo de dentro también:

$$2(11 - x^2) = (5 - x)^2 \;\Rightarrow\; 22 - 2x^2 = 25 - 10x + x^2 \;\Rightarrow\; -3x^2 + 10x - 3 = 0$$

3. Resolver.

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{-6} = \frac{-10 \pm 8}{-6} \quad\Rightarrow\quad x_1 = 3, \qquad x_2 = \frac{1}{3}$$

4. Comprobar. No existen los logaritmos de 0 ni de números negativos: hay que comprobar que ninguna solución los produce.

- $x = 3$: $11 - 9 = 2 > 0$; $5 - 3 = 2 > 0$. Válida.
- $x = \frac{1}{3}$: $11 - \frac{1}{9} = \frac{98}{9} > 0$; $5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3} > 0$. Válida.

Las dos son solución: $x = 3$ y $x = \frac{1}{3}$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\log(x+3) + \log 2 = \log(4x-2)$

1. Un solo logaritmo.

$$\log\left[\underline{\quad(1)\quad}(x+3)\right] = \log(4x-2)$$

2. Quitar logaritmos y resolver.

$$2x + 6 = 4x - 2 \implies x = \underline{\quad(2)\quad}$$

3. Comprobar. $x+3 = \underline{\quad(3)\quad} > 0$; $4x-2 = \underline{\quad(4)\quad} > 0$. Válida.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $2\log x - \log(x-2) = \log 8$

1. Un solo logaritmo a la izquierda.

(1)

2. Quitar logaritmos y resolver.

(2)

3. Comprobar.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve y comprueba: a) $\log(x+1)+\log(x-2)=\log 4$ b) $2\log(x-1)=\log(x+5)$

Resultado para comprobar: a) $x^2-x-6=0$: $x=3$ válida; $x=-2$ no (log de negativos)
b) $x^2-3x-4=0$: $x=4$ válida; $x=-1$ no

FICHA 19

Ecuaciones logarítmicas: dos trucos

Vídeo: «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo. 4.º ESO» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 104

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $2\log x + \log 10 = 3 + \log x$ b) $\dfrac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ **Sacar factor común.** En b) queda una ecuación de segundo grado incompleta.

Vídeo del ejercicio «Logaritmos y ecuaciones logarítmicas. Curso completo» (desde el minuto 41:58)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-19

Repaso: Sacar factor común

Solución

a) Primer truco: $\log x$ como una incógnita. Pasamos $\log x$ a la izquierda y $\log 10$ a la derecha. $2\log x - \log x$ es como $2x - x$:

$$2\log x - \log x = 3 - \log 10 \quad \Rightarrow \quad \log x = 3 - 1 = 2$$

Segundo truco: $\log 10 = 1$ (el logaritmo de la base vale 1). Y por la definición, $\log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100$. No anula ni hace negativo ningún logaritmo: $x = 100$.

b) Quitar el denominador. El logaritmo que divide pasa multiplicando y el 2 pasa a exponente:

$$\log(16 - x^2) = 2\log(3x - 4) = \log(3x - 4)^2 \;\Rightarrow\; 16 - x^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$-10x^2 + 24x = 0 \;\Rightarrow\; x(-10x + 24) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \quad x = \frac{12}{5}$$

b) Comprobar. $x = 0$: $3 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$: no existe el logaritmo, **no vale**. $x = \frac{12}{5}$: $16 - \frac{144}{25} = \frac{256}{25} > 0$ y $\frac{36}{5} - 4 = \frac{16}{5} > 0$. Solución: $x = \frac{12}{5}$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: $3\log x - \log 100 = \log x$

1. Agrupar los $\log x$.

$$3\log x - \log x = \log 100 \;\Rightarrow\; \underline{\quad(1)\quad}\ \log x = 2$$

2. Despejar.

$$\log x = \underline{\quad(2)\quad} \;\Rightarrow\; x = 10^1 = \underline{\quad(3)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{\log(2x^2+1)}{\log(x+1)} = 2$

1. Quitar el denominador y los logaritmos.

(1)

2. Resolver.

(2)

3. Comprobar. *Pista: con $x = 0$, ¿cuánto vale el denominador $\log(x+1)$?*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y comprueba: a) $\log x + \log 20 = 3$ b) $\dfrac{\log(x^2-5)}{\log x} = 2 + \dfrac{\log 2 - \log 3}{\log x}$

Resultado para comprobar: a) $\log(20x) = \log 1000 \Rightarrow x = 50$ b) $\log(x^2-5) = \log \frac{2x^2}{3} \Rightarrow x^2 = 15$: $x = \sqrt{15}$ ($-\sqrt{15}$ no vale)

BLOQUE 2

Sistemas de ecuaciones

FICHA 20

Sistemas 2×2: sustitución e igualación

Vídeo: «Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Todosobresaliente.com» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 104

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve por sustitución y por igualación: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 4y = -7 \end{cases}$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Al final siempre queda una ecuación de primer grado con una incógnita.

Vídeo del ejercicio
«Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-20

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

Antes de nada: ordenar. El sistema tiene que estar sin paréntesis ni fracciones, con las x y las y a un lado y los números al otro. Este ya lo está. La solución es la misma por cualquier método.

1. Sustitución. Despejamos una incógnita en una ecuación (la más fácil: la x de la segunda, que no tiene coeficiente) y la sustituimos en la otra:

$$x = -7 + 4y \quad \Rightarrow \quad 2(-7 + 4y) + 3y = 8$$

$$-14 + 8y + 3y = 8 \quad \Rightarrow \quad 11y = 22 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Y volvemos a la x despejada: $x = -7 + 4 \cdot 2 = 1$.

2. Igualación. Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{8 - 3y}{2} \qquad x = -7 + 4y$$

La x solo tiene un valor, así que las dos expresiones son iguales:

$$\frac{8 - 3y}{2} = -7 + 4y \;\Rightarrow\; 8 - 3y = -14 + 8y \;\Rightarrow\; -11y = -22 \;\Rightarrow\; y = 2$$

El -11 multiplica, así que pasa dividiendo **con su signo** (no se le cambia el signo). Y $x = \dfrac{8 - 3 \cdot 2}{2} = 1$.

Por los dos métodos: $x = 1$, $y = 2$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve por sustitución: $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

1. Despejamos x en la primera y sustituimos.

$$x = 7 - 2y \;\Rightarrow\; 3(7 - 2y) - y = 7 \;\Rightarrow\; 21 - \underline{\quad(1)\quad} = 7$$

2. Resolvemos.

$$-7y = \underline{\quad(2)\quad} \;\Rightarrow\; y = \underline{\quad(3)\quad}$$

3. La otra incógnita.

$$x = 7 - 2 \cdot \underline{\quad(4)\quad} = \underline{\quad(5)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve por igualación: $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$

1. Despejamos la misma incógnita en las dos. *Pista: la y de la primera es fácil; despeja también la y en la segunda.*

(1)

2. Igualamos y resolvemos.

(2)

3. La otra incógnita.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Resuelve: $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 4 \\ 2(x-1) - y = 3 \end{cases}$

b) En un aparcamiento hay 40 vehículos entre coches y motos, y en total 130 ruedas. ¿Cuántos coches y cuántas motos hay?

Resultado para comprobar: a) $3x + 2y = 24,\ 2x - y = 5$: $x = \frac{34}{7},\ y = \frac{33}{7}$ b) $x + y = 40,\ 4x + 2y = 130$: 25 coches y 15 motos

FICHA 21

Sistemas 2×2: reducción

Vídeo: «Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Todosobresaliente.com» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 105

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve por reducción, eliminando primero la x y después la y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 4y = -7 \end{cases}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ **Mínimo común múltiplo.** Para buscar el número por el que multiplicar cada ecuación.

Vídeo del ejercicio
«Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas» (desde el minuto 7:36)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-21

Repaso: Mínimo común múltiplo

Solución

1. La idea. Se multiplican las ecuaciones por números para que, al sumarlas, desaparezca una incógnita. Multiplicar una ecuación **entera** por un número, o sumar dos ecuaciones, da una ecuación con las mismas soluciones.

2. Eliminar la x. Arriba hay $2x$ y abajo x: multiplicamos la segunda por -2 y sumamos.

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 8 \\ -2x & + & 8y & = & 14 \\ \hline & & 11y & = & 22 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad y = 2$$

Sustituimos en la segunda: $x - 8 = -7 \Rightarrow x = 1$.

3. Eliminar la y cuando los coeficientes no encajan. 3 y 4 no son múltiplo uno del otro. Se multiplica cada ecuación por el coeficiente de la otra: la primera por 4 y la segunda por 3. Así queda $12y$ y $-12y$ (ya tienen signos distintos; si no, uno de los números se pondría negativo).

$$\begin{array}{rcrcr} 8x & + & 12y & = & 32 \\ 3x & - & 12y & = & -21 \\ \hline 11x & & & = & 11 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$$

Y $1 - 4y = -7 \Rightarrow -4y = -8 \Rightarrow y = 2$. La misma solución: $x = 1$, $y = 2$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve por reducción: $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 5x - 2y = 4 \end{cases}$

1. Sumamos directamente.

$$3x + 5x = 12 + 4 \implies \underline{\quad(1)\quad}\, x = 16 \implies x = \underline{\quad(2)\quad}$$

2. La y.

$$3 \cdot 2 + 2y = 12 \implies 2y = \underline{\quad(3)\quad} \implies y = \underline{\quad(4)\quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve por reducción: $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ 6x + 5y = 7 \end{cases}$

1. ¿Por qué números multiplicas para eliminar la x?. *Pista: busca el m.c.m. de 4 y 6, y cuida que los signos sean distintos.*

(1)

2. Suma y resuelve.

(2)

3. La otra incógnita.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Resuelve por reducción: $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 4x + 7y = 29 \end{cases}$

b) Una entrada de adulto y dos de niño cuestan 22 €; tres de adulto y una de niño cuestan 36 €. ¿Cuánto cuesta cada entrada?

Resultado para comprobar: a) $x = 2, y = 3$ b) $a + 2n = 22, 3a + n = 36$: adulto 10 €, niño 6 €

FICHA 22

Sistemas 3×3: método de Gauss

Vídeo: «Tres ecuaciones con tres incógnitas. Método de Gauss.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 105

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado.

a) Resuelve el sistema escalonado: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+2z=-1 \\ z=-1 \end{cases}$

b) Resuelve por el método de Gauss: $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+4z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.** Gauss usa el método de reducción.

Vídeo del ejercicio
«Tres ecuaciones con tres incógnitas. Método de Gauss» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-22

Repaso: Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Solución

a) Sistema escalonado. Parece una escalera: tres incógnitas, dos, una. Se resuelve de abajo arriba: $z=-1$; subimos un escalón: $y-2=-1 \Rightarrow y=1$; subimos otro: $x+1-1=3 \Rightarrow x=3$.

b) La idea de Gauss. Transformar el sistema en uno escalonado eliminando, por reducción y en orden, los términos de abajo a la izquierda. Ayuda que la primera ecuación tenga un 1 delante de la x: cambiamos el orden (no cambia nada).

$$\begin{aligned} E_1:&\quad x+y-z=1 \\ E_2:&\quad 5x+3y+4z=2 \\ E_3:&\quad 3x+2y+z=1 \end{aligned}$$

b) Eliminar la x de E_2 y de E_3. $-5E_1+E_2$: $(-5x-5y+5z=-5)+(5x+3y+4z=2) \Rightarrow -2y+9z=-3$

$-3E_1+E_3$: $(-3x-3y+3z=-3)+(3x+2y+z=1) \Rightarrow -y+4z=-2$

b) Eliminar la y de la tercera. Ya no se puede usar E_1 (volvería a meter la x). Con las dos nuevas: multiplicamos la tercera por -2 y sumamos:

$$(-2y+9z=-3)+(2y-8z=4) \Rightarrow z=1$$

b) Sistema escalonado y solución.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -2y+9z=-3 \\ z=1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &-2y+9=-3 \Rightarrow -2y=-12 \Rightarrow y=6 \\ &x+6-1=1 \Rightarrow x=-4 \end{aligned}$$

Solución: $x = -4$, $y = 6$, $z = 1$. (Otra vez: el -2 pasa dividiendo con su signo.)

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

1. Eliminamos la x. $-2E_1 + E_2$: $-3y - z =$ (1) $\qquad -E_1 + E_3$: $y -$ (2) $= -4$

2. Eliminamos la y de la tercera. Multiplicamos la nueva tercera por 3 y sumamos: $-7z =$ (3) $\Rightarrow z =$ (4)

3. Subimos por la escalera.

$$-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = \text{(5)} \qquad x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = \text{(6)}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve por Gauss: $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$

1. Reordena y elimina la x. *Pista: pon arriba la ecuación que empieza por x.*

(1)

2. Elimina la y.

(2)

3. Solución.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. En una tienda, 2 cuadernos, 1 bolígrafo y 3 lápices cuestan 7,50 €; 1 cuaderno, 2 bolígrafos y 1 lápiz cuestan 5 €; y 3 cuadernos y 2 lápices cuestan 8,50 €. Plantea un sistema y halla el precio de cada artículo.

Resultado para comprobar: Cuaderno 2,50 €, bolígrafo 1 €, lápiz 0,50 €

BLOQUE 3

Inecuaciones

FICHA 23

Intervalos: desigualdad, intervalo y recta

Vídeo: «Intervalos, definición y uso. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 105

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe como intervalo y representa en la recta real:

$$x > -3 \qquad x \leq 3 \qquad x > 8 \qquad x < -8 \qquad -5 < x \leq 1 \qquad 2 < x \leq 5$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- ▹ Solo necesitas saber ordenar números en la recta, también los negativos: $-8 < -5 < 0$.

Vídeo del ejercicio
«Intervalos, definición y uso» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-23

Solución

1. Tres formas de decir lo mismo. Un intervalo es un trozo de la recta real. Se puede escribir como **desigualdad**, como **intervalo** o dibujarlo en la **recta**.

- Si el extremo **no** está incluido ($<$, $>$): paréntesis ( ) y punto hueco ○.
- Si el extremo **sí** está incluido ($\leq$, $\geq$): corchete [ ] y punto relleno ●.
- Infinito (∞) no es un número: siempre va con paréntesis.

2. Los seis casos.

Desigualdad	Intervalo	Recta
$x > -3$	$(-3, +\infty)$	○ en -3 y todo lo de la derecha
$x \leq 3$	$(-\infty, 3]$	● en 3 y todo lo de la izquierda
$x > 8$	$(8, +\infty)$	○ en 8 hacia la derecha
$x < -8$	$(-\infty, -8)$	○ en -8 hacia la izquierda
$-5 < x \leq 1$	$(-5, 1]$	○ en -5, ● en 1 y lo de en medio
$2 < x \leq 5$	$(2, 5]$	○ en 2, ● en 5 y lo de en medio

3. Un ejemplo dibujado: $(-5, 1]$.



◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Completa: a) $x \geq 4$ b) $-2 \leq x < 6$ c) $(-\infty, 0)$

1. a). Intervalo: ____(1)____. El 4 se pinta con un punto ____(2)____.
2. b). Intervalo: ____(3)____. Puntos: en -2, ____(4)____; en 6, ____(5)____.
3. c). Desigualdad: ____(6)____.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Escribe como desigualdad y como intervalo: a) los números mayores que -1 y menores o iguales que 7; b) los números menores que 2; c) los números mayores o iguales que $-\frac{1}{2}$. Representa el a).

1. a).

(1)

2. b) y c).

(2)

3. Representación del a).

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Escribe como intervalo: $x \leq -1;\ 0 < x \leq 10;\ x > \sqrt{2}$.
b) ¿Qué números enteros hay en el intervalo $(-3, 2]$?
c) Escribe como un solo intervalo los números que están a la vez en $(-2, 5]$ y en $[1, 8)$.

Resultado para comprobar: a) $(-\infty, -1]$; $(0, 10]$; $(\sqrt{2}, +\infty)$ b) $-2, -1, 0, 1, 2$ c) $[1, 5]$

FICHA 24

Inecuaciones de primer grado: el cambio de signo

Vídeo: «Inecuaciones de primer grado: Aprende matemáticas» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 106

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $x+2<3$ b) $2x+2<-4$ c) $-2x+3<-7$ d) $2x+3<-7$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Se resuelven casi igual que las ecuaciones de primer grado.

Vídeo del ejercicio «Inecuaciones de primer grado» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-24

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Solución

1. Como una ecuación. Una inecuación es como una ecuación, pero con una desigualdad en lugar del igual. Se resuelve igual: lo que suma pasa restando y lo que multiplica pasa dividiendo.

$$\text{a) } x<3-2 \Rightarrow x<1 \qquad \text{b) } 2x<-6 \Rightarrow x<-3$$

2. c) La diferencia: dividir entre un negativo.

$$-2x<-10$$

El -2 multiplica, así que pasa dividiendo (con su signo). Y como dividimos entre un número **negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad**:

$$x>\frac{-10}{-2} \quad \Rightarrow \quad x>5$$

En d), en cambio, $2x<-10 \Rightarrow x<-5$: el 2 es positivo y el signo no cambia.

3. ¿Por qué se cambia el signo?. En una igualdad se puede sumar, restar, multiplicar o dividir los dos lados por el mismo número. En una desigualdad también, salvo un detalle: $2+3\leq 8$ es cierto; multiplicando por 2, $10\leq 16$, sigue siendo cierto; pero multiplicando por -2 queda $-10\leq -16$, que es **falso** (-10 es mayor que -16). Al multiplicar o dividir por un negativo, la desigualdad se da la vuelta: $-10\geq -16$.

«El -2 que multiplica pasa dividiendo» es, en realidad, dividir los dos lados entre -2.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y escribe la solución como intervalo: a) $3x - 5 \geq 7$ b) $4 - 3x > 10$

1. a).

$$3x \geq 12 \Rightarrow x \geq \underline{\quad (1) \quad} \Rightarrow \underline{\quad (2) \quad}$$

2. b).

$$-3x > \underline{\quad (3) \quad} \Rightarrow x \underline{\quad (4) \quad} \frac{6}{-3} \Rightarrow x < -2 \Rightarrow \underline{\quad (5) \quad}$$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve y escribe la solución como intervalo: a) $5-2x \leq 3x+20$ b) $-\frac{x}{4} > 2$

1. a). *Pista: ¿dividirás entre un número positivo o negativo?*

(1)

2. b).

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado.

a) Resuelve: $7 - 4x \geq 2x - 11$. Escribe la solución como intervalo.
b) El triple de un número menos 5 es menor que el número más 9. ¿Qué números cumplen esa condición?

Resultado para comprobar: a) $-6x \geq -18 \Rightarrow x \leq 3$: $(-\infty, 3]$ b) $3x - 5 < x + 9 \Rightarrow x < 7$

FICHA 25

Inecuaciones con paréntesis y fracciones

Vídeo: «Inecuaciones de primer grado: Aprende matemáticas» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 106

Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$\text{a) } 2(x-7)+3<5-(x-2) \qquad \text{b) } \frac{x}{3}-7\geq\frac{8x}{2}+\frac{5}{3}$$

$$\text{c) } \frac{3}{2}(5+2x)+7x\geq 5x-\frac{3}{5}$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de primer grado (despejar).** Mismos pasos: paréntesis, denominadores, agrupar y despejar.
- **Mínimo común múltiplo.** Para el denominador común.

Vídeo del ejercicio «Inecuaciones de primer grado» (desde el minuto 14:29)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-25

Repaso: Ecuaciones de primer grado (despejar)

Repaso: Mínimo común múltiplo

Solución

a) Quitar paréntesis. El menos delante del paréntesis cambia todos los signos de dentro:

$$2x-14+3<5-x+2 \implies 2x+x<5+2+14-3 \implies 3x<18 \implies x<6$$

El 3 es positivo: el signo no cambia.

b) Quitar denominadores. m.c.m.(3, 2, 3) = 6:

$$\frac{2x}{6}-\frac{42}{6}\geq\frac{24x}{6}+\frac{10}{6} \implies 2x-42\geq 24x+10 \implies -22x\geq 52$$

Dividimos entre −22, que es negativo: **cambia el signo**.

$$x\leq\frac{52}{-22}=-\frac{26}{11}$$

c) Primero el paréntesis, luego las fracciones. Es más fácil quitar primero el paréntesis (así no se multiplica dos veces):

$$\frac{15}{2}+\frac{6x}{2}+7x\geq 5x-\frac{3}{5}$$

m.c.m.(2, 5) = 10:

$$\frac{75}{10}+\frac{30x}{10}+\frac{70x}{10}\geq\frac{50x}{10}-\frac{6}{10} \implies 75+30x+70x\geq 50x-6$$

$$100x-50x\geq -6-75 \implies 50x\geq -81 \implies x\geq -\frac{81}{50}$$

Aunque el resultado sea negativo, el signo no cambia: solo cambia si el número entre el que **dividimos** es negativo, y 50 es positivo.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $3(x+2)-4 \le 2(x-1)+7$

1. Quitar paréntesis.

$$3x+6-4 \le 2x-\ \underline{\ (1)\ }\ +7$$

2. Agrupar.

$$3x-2x \le -2+7-6+4 \implies x \le \underline{\ (2)\ }$$

3. Intervalo. _____ (3)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{4} > \dfrac{x}{3}$

1. Denominador común y quitar denominadores. *Pista: m.c.m.(2, 4, 3) = 12. Cuidado con el menos delante de la segunda fracción.*

(1)

2. Agrupar y despejar. *Pista: ¿entre qué número divides al final?*

(2)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve y da la solución como intervalo:

$$\frac{2(x-3)}{5} - \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{10} - 2$$

Resultado para comprobar:
$4(x-3) - 5(x+1) \geq x - 20 \Rightarrow -x - 17 \geq x - 20 \Rightarrow -2x \geq -3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$: $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$

FICHA 26

Sistemas de inecuaciones

Vídeo: «Sistemas de inecuaciones. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 106

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $\begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 \geq -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3 \geq 1 \\ -x+2 < 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3 < 1 \\ -x+6 < 3 \end{cases}$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- Necesitas resolver inecuaciones de primer grado y representar intervalos (fichas anteriores de este bloque).

Vídeo del ejercicio «Sistemas de inecuaciones» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-26

Solución

1. La idea. La solución de un sistema son los valores que cumplen **las dos** inecuaciones a la vez. Se resuelve cada una por separado, se representan en la recta y se busca dónde se solapan.

2. a). $2x \geq -2 \Rightarrow x \geq -1$. $-x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3$ (al multiplicar por -1, cambia el signo).

En la recta: la primera va de -1 (relleno) hacia la derecha; la segunda, de 3 (relleno) hacia la izquierda. Se solapan entre -1 y 3:

$$[-1, 3] \qquad \text{es decir} \qquad -1 \leq x \leq 3$$

3. b). La primera es la misma: $x \geq -1$. La segunda: $-x < -1 \Rightarrow x > 1$ (punto hueco en 1). Las dos van hacia la derecha; se solapan a partir de 1, y el 1 no entra porque no cumple la segunda:

$$(1, +\infty) \qquad \text{es decir} \qquad x > 1$$

4. c). $2x < -2 \Rightarrow x < -1$. $-x < -3 \Rightarrow x > 3$. Una va hacia la izquierda de -1 y la otra hacia la derecha de 3: **no se solapan**. No hay ningún número que cumpla las dos: **el sistema no tiene solución**. No es un error: es así.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\begin{cases} x - 4 < 2 \\ 3x + 1 \geq 7 \end{cases}$

1. Cada inecuación.

$x < \underline{\quad (1) \quad}$ $\qquad$ $3x \geq 6 \Rightarrow x \geq \underline{\quad (2) \quad}$

2. Dónde se solapan. Solución: $\underline{\quad (3) \quad}$, es decir, $2 \leq x < 6$.

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\begin{cases} 5 - 2x \leq 1 \\ \dfrac{x}{3} - 1 < 2 \end{cases}$

1. Primera inecuación. *Pista: al despejar, ¿divides entre un negativo?*

(1)

2. Segunda inecuación.

(2)

3. Solución del sistema.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve y da la solución como intervalo:

$$\text{a)} \begin{cases} 2(x-1) > x-5 \\ 4-x \geq 2x-5 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 3x-2 > 7 \\ x+1 \leq 2 \end{cases}$$

Resultado para comprobar: a) $x > -3$ y $x \leq 3$: $(-3, 3]$ b) $x > 3$ y $x \leq 1$: no tiene solución

FICHA 27

Inecuaciones de segundo grado: la tabla de signos

Vídeo: «Inecuaciones de segundo grado. Aprende matemáticas» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 107

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Vídeo del ejercicio
«Inecuaciones de segundo grado» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-27

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Enunciado. Resuelve: a) $2x^2 - 2x - 4 > 0$ b) $-2x^2 + 14x - 24 \leq 0$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de segundo grado.** Para hallar las raíces y factorizar el polinomio.

Solución

a) 1. Factorizar. Queremos saber para qué valores el polinomio es positivo. Para estudiar su signo, lo factorizamos: raíces de $2x^2 - 2x - 4 = 0$:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{4} = \frac{2 \pm 6}{4} \Rightarrow x = 2,\ x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad 2(x-2)(x+1) > 0$$

No hay que olvidar el coeficiente de x^2, el 2.

a) 2. Tabla de signos. Las raíces parten la recta en tres intervalos. En cada uno, cada factor tiene un signo fijo (cambia justo en su raíz, donde vale 0):

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
2	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$2(x-2)(x+1)$	$+$	$-$	$+$

Nos piden > 0 (positivo): $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. El símbolo $\cup$ (unión) junta los dos intervalos.

b) Factorizar.

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196-192}}{-4} = \frac{-14 \pm 2}{-4} \Rightarrow x = 3,\ x = 4$$

$$-2(x-3)(x-4) \leq 0$$

Aquí el coeficiente -2 es muy importante: cambia todos los signos.

b) Tabla de signos.

	$(-\infty, 3)$	$(3, 4)$	$(4, +\infty)$
-2	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
producto	$-$	$+$	$-$

Nos piden ≤ 0: los negativos **y también los ceros**, así que las raíces entran (corchete):

$$(-\infty, 3] \cup [4, +\infty)$$

Con $\leq$ o $\geq$, las raíces llevan corchete; con $<$ o $>$, paréntesis. Infinito siempre va con paréntesis.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $x^2 - x - 6 < 0$

1. Raíces y factorización.

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = \underline{\ (1)\ }, x = \underline{\ (2)\ } \qquad (x-3)(x+2) < 0$$

2. Signos del producto. En $(-\infty, -2)$: (3); en $(-2, 3)$: (4); en $(3, +\infty)$: (5)

3. Solución. (6)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$

1. Raíces y factorización. *Pista: no olvides el coeficiente -1 delante.*

(1)

2. Tabla de signos.

(2)

3. Solución. *Pista: ¿entran las raíces?*

(3)

◯ Ejercicio de examen

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $x^2 \geq 9$ b) $3x^2 - 2x \leq 1$ c) $x(x-5) > 6$

Resultado para comprobar: a) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ b) $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ c) $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$

FICHA 28

Inecuaciones de segundo grado: raíz doble o sin raíces

Vídeo: «Inecuaciones de segundo grado. Aprende matemáticas» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 107

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve, con cada uno de los signos $>$, $\geq$, $<$ y $\leq$:

$$\text{a) } x^2+2x+1 \square 0 \qquad \text{b) } x^2+x+1 \square 0$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Ecuaciones de segundo grado.** Para ver si la ecuación tiene dos raíces, una doble o ninguna.

Vídeo del ejercicio «Inecuaciones de segundo grado» (desde el minuto 15:25)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-28

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

a) Raíz doble. $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1$ (doble), así que $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Un cuadrado **nunca es negativo**: es positivo siempre, salvo en $x=-1$, donde vale 0. No hace falta tabla, solo pensar:

$(x+1)^2>0$	todos los números menos el -1: $\mathbb{R}-\{-1\}$
$(x+1)^2\geq 0$	todos: $\mathbb{R}$
$(x+1)^2<0$	ninguno: sin solución ($\emptyset$)
$(x+1)^2\leq 0$	solo $x=-1$

b) Sin raíces. $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$: no tiene raíces reales. Las raíces eran la frontera entre los valores positivos y los negativos; si no hay frontera, el polinomio tiene **siempre el mismo signo**. Para saber cuál, probamos un valor cualquiera; el más fácil es 0: $0+0+1=1>0$. Es siempre positivo (y nunca 0).

$x^2+x+1>0$ y ≥ 0	todos los números: $\mathbb{R}$
$x^2+x+1<0$ y ≤ 0	ninguno: sin solución

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $x^2 - 6x + 9 > 0$ b) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$

1. Factorizar.

$$x^2 - 6x + 9 = (\ _{(1)}\ )^2$$

2. Soluciones. a) Todos menos $_{(2)}$: $\mathbb{R} - \{3\}$ b) Solo $_{(3)}$

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $2x^2 - x + 3 < 0$ b) $-x^2 + 2x - 5 < 0$

1. a) ¿Tiene raíces? ¿Qué signo tiene en $x = 0$?.

(1)

2. b).

(2)

◯ Ejercicio de examen

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ b) $x^2 + 5 > 2x$ c) $-(x-2)^2 \geq 0$

Resultado para comprobar: a) $(2x+1)^2 \leq 0$: solo $x = -\frac{1}{2}$ b) $x^2 - 2x + 5 > 0$ sin raíces y positivo en 0: $\mathbb{R}$ c) solo $x = 2$

FICHA 29

Inecuaciones racionales

Vídeo: «Inecuación Racional. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 107

● Ejercicio resuelto

● □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$ b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-6} \leq 0$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

▹ **Ecuaciones de segundo grado.** Para factorizar numerador y denominador.

Vídeo del ejercicio «Inecuación racional» (desde el principio) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-29

Repaso: Ecuaciones de segundo grado

Solución

a) Raíces de arriba y de abajo. Arriba, $x+2=0 \Rightarrow x=-2$. Abajo, $x-3=0 \Rightarrow x=3$. Parten la recta en tres intervalos.

a) Tabla de signos. Cada factor cambia de signo en su raíz (a la derecha, positivo; a la izquierda, negativo). El signo de la fracción sale de la regla de los signos de la división:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+2}{x-3}$	$+$	$-$	$+$

Nos piden >0: $(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$, con paréntesis porque es $>$.

b) Factorizar. Arriba: $x^2+2x+1=(x+1)^2$ (raíz doble -1). Abajo: $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ (raíces -2 y 3).

b) Tabla de signos. Un cuadrado es siempre positivo (o 0), así que $(x+1)^2$ no cambia el signo.

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
fracción	$+$	$-$	$-$	$+$

b) ¡Cuidado con los extremos!. Nos piden ≤ 0: los negativos y los ceros. La fracción vale 0 en $x=-1$ (entra), así que los dos intervalos se juntan. Pero -2 y 3 anulan el **denominador**, y no se puede dividir entre 0: **nunca entran**, aunque haya un $\leq$.

$$(-2,3)$$

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{x-1}{x+4} \leq 0$

1. Raíces. Arriba: $x =$ (1) . Abajo: $x =$ (2) .

2. Signo de la fracción. En $(-\infty, -4)$: (3) ; en $(-4, 1)$: (4) ; en $(1, +\infty)$: (5)

3. Solución. El 1 entra (anula el numerador) y el -4 no (anula el denominador): (6)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{x^2-4}{x} \geq 0$

1. Factorizar y raíces.

(1)

2. Tabla de signos.

(2)

3. Solución. *Pista: ¿qué extremos entran y cuáles no?*

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $\dfrac{2x-6}{x+1} < 0$ b) $\dfrac{x^2-9}{(x-1)^2} \geq 0$

Resultado para comprobar: a) $(-1, 3)$ b) $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ (el 1 no está en esos intervalos)

FICHA 30

Inecuaciones racionales comparadas con un número

Vídeo: «Inecuación Racional. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 108

Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve:

$$\frac{x+2}{x-1} < 7$$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- **Sumar y restar fracciones.** Para juntar todo en una sola fracción.

Vídeo del ejercicio «Inecuación racional» (desde el minuto 16:34) todosobresaliente.com/v/ecuaciones-30

Repaso: Sumar y restar fracciones

Solución

1. Comparar con 0. El método necesita una fracción comparada con 0. El 7 pasa restando y se hace una sola fracción con denominador $x-1$. **No** se puede pasar el $x-1$ multiplicando, porque no sabemos si es positivo o negativo.

$$\frac{x+2}{x-1} - 7 < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x+2-7(x-1)}{x-1} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{-6x+9}{x-1} < 0$$

2. Factorizar. $-6x+9=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$, y con el coeficiente de la x: $-6\left(x-\frac{3}{2}\right)$. Abajo, $x=1$.

3. Tabla de signos. El -6 es siempre negativo (no depende de x).

	$(-\infty,1)$	$\left(1,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
-6	$-$	$-$	$-$
$x-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
fracción	$-$	$+$	$-$

4. Solución. Negativa: $(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, abiertos porque es $<$.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{x}{x-2} \geq 3$

1. Una fracción comparada con 0.

$$\frac{x-3(x-2)}{x-2} \geq 0 \implies \frac{\text{(1)}}{x-2} \geq 0$$

2. Raíces. Arriba: $-2x+6=0 \Rightarrow x =$ (2). Abajo: $x =$ (3).

3. Signos y solución. Signos: −, +, −. Solución: (4) (el 2 no entra; el 3 sí).

◔ Guiado 2 · completa los pasos

☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $\dfrac{2x+1}{x+3} > 1$

1. Una fracción comparada con 0.

(1)

2. Tabla de signos.

(2)

3. Solución.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $\dfrac{3}{x-1} \leq 1$ b) $\dfrac{x+5}{x+1} > 2$

Resultado para comprobar: a) $\dfrac{4-x}{x-1} \leq 0$: $(-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$ b) $\dfrac{3-x}{x+1} > 0$: $(-1, 3)$

FICHA 31

Inecuaciones con valor absoluto

Vídeo: «Inecuación con valor absoluto. Aprende matemáticas.» · Respuestas de los huecos: solucionario, pág. 108

● Ejercicio resuelto

● ☐ hecho ☐ repasar

Vídeo del ejercicio «Inecuación con valor absoluto» (desde el principio)
todosobresaliente.com/v/ecuaciones-31

Enunciado. Resuelve: a) $|x| < 3$ b) $|3x-2| < 4$ c) $|-2x+1| < 5$

Matemáticas que vas a usar (vídeo de repaso en el QR del margen)

- Repasa la ficha de ecuaciones con valor absoluto y la del cambio de signo en las inecuaciones.

Solución

a) Qué significa. $|x| < 3$: si x es 0, 1, 2, −1, −2... su valor absoluto es menor que 3. Pero con −4, $|-4| = 4$, que no es menor que 3. Los que cumplen están entre −3 y 3 (sin incluirlos):

$$-3 < x < 3$$

b) Lo de dentro, entre el número y su opuesto. $|3x-2| < 4$ significa $-4 < 3x-2 < 4$. Son dos inecuaciones a la vez, que se resuelven del tirón haciendo lo mismo en las tres partes: sumamos 2 y dividimos entre 3.

$$-2 < 3x < 6 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{3} < x < 2 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$$

c) Dividir entre un negativo.

$$-5 < -2x+1 < 5 \Rightarrow -6 < -2x < 4$$

Dividimos entre −2: hay que **cambiar el sentido de las dos desigualdades**:

$$3 > x > -2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad (-2, 3)$$

Se ve que tiene que ser así: $3 < x < -2$ sería imposible.

◑ Guiado 1 · completa los huecos

◑ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $|x-4| \le 1$

1. Doble desigualdad.

$$\underline{\quad(1)\quad} \le x-4 \le 1$$

2. Sumamos 4 a las tres partes.

$$\underline{\quad(2)\quad} \le x \le \underline{\quad(3)\quad}$$

3. Intervalo. _____(4)_____ (cerrado, porque es $\le$)

◔ Guiado 2 · completa los pasos

◔ ☐ hecho ☐ repasar

Enunciado. Resuelve: $|5-3x| < 7$

1. Doble desigualdad y restar 5.

(1)

2. Dividir. *Pista: ¿entre qué número divides? ¿Qué le pasa a las desigualdades?*

(2)

3. Intervalo.

(3)

◯ Ejercicio de examen

◯ □ hecho □ repasar

Enunciado. Resuelve: a) $\left|\frac{x}{2}+1\right| \leq 3$ b) $|2x+3| < 0$ c) $|4-x| < 2$

Resultado para comprobar: a) $[-8, 4]$ b) Sin solución: un valor absoluto nunca es negativo c) $(2, 6)$

Examen tipo 1

Tiempo: 90 minutos **Puntuación:** 10 puntos (4 problemas de 2,5 puntos)

Hazlo como en un examen de 4.º de ESO: sin mirar el libro ni el formulario, sin calculadora y explicando cada paso. Después corrígelo con las soluciones (solucionario, pág. 108) y anota tu nota en la hoja de seguimiento.

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Explica por qué, después de resolver una ecuación con raíces (irracional), es obligatorio comprobar las soluciones. (1 punto)

b) Resuelve:

i) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ (0,75 puntos)

ii) $\sqrt{x+3} + 3 = x$ (0,75 puntos)

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Define el logaritmo en base a de un número y explica por qué no existe $\log(-10)$. (1 punto)

b) Resuelve:

i) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 30$ (0,75 puntos)

ii) $\log(x+2) + \log(x-1) = \log 4$ (0,75 puntos)

Problema 3 (2,5 puntos)

a) ¿Qué es un sistema escalonado? Explica en qué consiste el método de Gauss. (1 punto)

b) Resuelve:

i) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ (0,75 puntos)

ii) Un examen tipo test tiene 20 preguntas. Cada acierto suma 0,5 puntos y cada fallo resta 0,25. Un alumno contestó todas y sacó un 7. ¿Cuántas acertó? (0,75 puntos)

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Explica por qué, al multiplicar o dividir los dos miembros de una inecuación por un número negativo, hay que cambiar el sentido de la desigualdad. Pon un ejemplo con números. (1 punto)

b) Resuelve y da la solución como intervalo:

i) $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ (0,75 puntos)

ii) $\begin{cases} 3x - 1 > 5 \\ \dfrac{x}{2} \leq 4 \end{cases}$ (0,75 puntos)

Examen tipo 2

Tiempo: 90 minutos **Puntuación:** 10 puntos (4 problemas de 2,5 puntos)

Hazlo como en un examen de 4.º de ESO: sin mirar el libro ni el formulario, sin calculadora y explicando cada paso. Después corrígelo con las soluciones (solucionario, pág. 109) y anota tu nota en la hoja de seguimiento.

Problema 1 (2,5 puntos)

a) ¿Cuántas soluciones reales puede tener una ecuación de segundo grado? Explica cómo se sabe sin resolverla del todo. (1 punto)

b) Resuelve:

i) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ (0,75 puntos)

ii) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = 2$ (0,75 puntos)

Problema 2 (2,5 puntos)

a) Enuncia las propiedades del logaritmo de un producto, de un cociente y de una potencia. (1 punto)

b) Resuelve:

i) Calcula sin calculadora: $\log_2 \dfrac{1}{8} + \log_3 \sqrt{27} - \log 0{,}01$ (0,75 puntos)

ii) $2\log x = \log(4x - 3)$ (0,75 puntos)

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Explica en qué consiste el método de reducción y cuándo conviene usarlo en lugar de sustitución. (1 punto)

b) Resuelve:

i) $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 5x + 3y = 13 \end{cases}$ (0,75 puntos)

ii) Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Hace 5 años tenía el cuádruple. ¿Qué edad tiene cada uno? (0,75 puntos)

Problema 4 (2,5 puntos)

a) ¿Qué diferencia hay entre los intervalos $(-2, 3)$ y $[-2, 3]$? Escríbelos como desigualdades y represéntalos. (1 punto)

b) Resuelve y da la solución como intervalo:

i) $\dfrac{x-3}{x+2} \geq 0$ (0,75 puntos)

ii) $|2x-1| \leq 5$ (0,75 puntos)

Solucionario

Respuestas de todos los huecos de los ejercicios guiados, en el mismo orden que el libro. Cada ficha indica la página donde está su enunciado.

Ficha 1 · Ecuaciones de primer grado con paréntesis y fracciones

(ficha en la pág. 2)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 6

Hueco 2: 2

Hueco 3: 4

Hueco 4: 4

Hueco 5: 5

◔ Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{3x-6}{4}-\dfrac{2x+1}{6}=x-\dfrac{7}{3} \Rightarrow \dfrac{3(3x-6)}{12}-\dfrac{2(2x+1)}{12}=\dfrac{12x}{12}-\dfrac{28}{12}$

Hueco 2: $9x-18-4x-2=12x-28$

Hueco 3: $9x-4x-12x=-28+18+2 \Rightarrow -7x=-8 \Rightarrow x=\dfrac{8}{7}$

Ficha 2 · Del enunciado a la ecuación: lenguaje algebraico (ficha en la pág. 5)

◑ Guiado 1

Hueco 1: $\dfrac{x}{3}$

Hueco 2: 144

Hueco 3: 36

Hueco 4: 12

◔ Guiado 2

Hueco 1: x, $x+1$ y $x+2$

Hueco 2: $x+(x+1)+(x+2)=93 \Rightarrow 3x+3=93 \Rightarrow 3x=90 \Rightarrow x=30$

Hueco 3: 30, 31 y 32. $30+31+32=93$.

Ficha 3 · Ecuaciones de segundo grado incompletas (ficha en la pág. 8)

Guiado 1

Hueco 1: 9

Hueco 2: 3

Hueco 3: $x - 5$

Hueco 4: 5

Guiado 2

Hueco 1: $5x^2 = -20 \Rightarrow x^2 = -4$. No hay ningún número real que al cuadrado dé -4: no tiene solución real.

Hueco 2: $4x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(4x - 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{9}{4}$

Hueco 3: $\dfrac{x^2}{2} = 8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

Ficha 4 · Ecuación completa: la fórmula (ficha en la pág. 11)

Guiado 1

Hueco 1: -5

Hueco 2: 6

Hueco 3: 24

Hueco 4: 1

Hueco 5: 3

Hueco 6: 2

Guiado 2

Hueco 1: $x^2 + 2x = 6x + 12 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

Hueco 2: $a = 1,\ b = -4,\ c = -12$: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \dfrac{4 \pm 8}{2}$

Hueco 3: $x_1 = 6,\ x_2 = -2$

Ficha 5 · Solución doble y ecuaciones sin solución (ficha en la pág. 14)

Guiado 1

Hueco 1: 36

Hueco 2: 0

Hueco 3: 3

Hueco 4: $x - 3$

Guiado 2

Hueco 1: $x^2 + 2x + 2 = 0$: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$. La raíz de un número negativo no es real: no tiene solución real.

Hueco 2: $4x^2 - 4x + 1 = 0$: $x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \dfrac{1}{2}$ (solución doble).

Ficha 6 · Ecuaciones bicuadradas: cambio de variable (ficha en la pág. 17)

◑ Guiado 1

Hueco 1: 16

Hueco 2: 4

Hueco 3: 1

Hueco 4: ± 2

Hueco 5: ± 1

◔ Guiado 2

Hueco 1: $z^2 - 3z - 4 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{3 \pm 5}{2}$: $z_1 = 4$, $z_2 = -1$. $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; $x^2 = -1$ no tiene solución real. Solo dos soluciones reales: ± 2.

Hueco 2: $z^2 + 5z + 6 = 0 \Rightarrow z = -2, z = -3$. Las dos son negativas: $x^2 = -2$ y $x^2 = -3$ no tienen solución real. La ecuación no tiene soluciones reales.

Ficha 7 · Ecuaciones de grado 3 y 4 por Ruffini (ficha en la pág. 20)

◑ Guiado 1

Hueco 1: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Hueco 2: -1

Hueco 3: -6

Hueco 4: 3

Hueco 5: -2

Hueco 6: $(x - 3)(x + 2)$

◔ Guiado 2

Hueco 1: Con -1: coeficientes $1, -2, -3, 4, 4 \to 1, -3, 0, 4 \mid 0$. $x_1 = -1$; queda $x^3 - 3x^2 + 4$.

Hueco 2: Otra vez -1: $1, -3, 0, 4 \to 1, -4, 4 \mid 0$. $x_2 = -1$; queda $x^2 - 4x + 4$.

Hueco 3: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm 0}{2} = 2$ (doble). Soluciones: $-1, -1, 2, 2$. $(x + 1)^2(x - 2)^2$

Ficha 8 · Si falta el término independiente: factor común (ficha en la pág. 23)

◑ Guiado 1

Hueco 1: $x^2 - 9$

Hueco 2: 0

Hueco 3: ± 3

Guiado 2

Hueco 1: $2x^3$: $2x^3\,(x^2 - x - 2) = 0$

Hueco 2: $x = 0$ (triple, por el x^3). $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm 3}{2}$: $x = 2$, $x = -1$.

Hueco 3: $2x^3\,(x - 2)(x + 1)$

Ficha 9 · Ecuaciones con la x en el denominador (ficha en la pág. 26)

Guiado 1

Hueco 1: x

Hueco 2: $5x$

Hueco 3: 2

Hueco 4: $\frac{1}{2}$

Hueco 5: No: las dos son válidas.

Guiado 2

Hueco 1: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$; m.c.m. $= (x - 3)(x + 3)$

Hueco 2: $x(x+3)-3(x-3) = 18 \Rightarrow x^2+3x-3x+9 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Hueco 3: $x = 3$ anula $x-3$ y $x = -3$ anula $x+3$: ninguna vale. La ecuación no tiene solución.

Ficha 10 · Ecuaciones con una raíz (ficha en la pág. 29)

Guiado 1

Hueco 1: $2x$

Hueco 2: 6

Hueco 3: 2

Hueco 4: -3

Hueco 5: $x = 2$

Guiado 2

Hueco 1: $x - 1 = \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2$

Hueco 2: $2x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$, $x = -3$

Hueco 3: $x = 4$: $4 - \sqrt{9} = 1$ ✓. $x = -3$: $-3 - \sqrt{16} = -7 \neq 1$, falsa. Solución: $x = 4$.

Ficha 11 · Ecuaciones con dos raíces (ficha en la pág. 32)

Guiado 1

Hueco 1: $2\sqrt{x}$

Hueco 2: 2

Hueco 3: 4

Hueco 4: $3 - 2 = 1$

Guiado 2

Hueco 1: $\sqrt{2x+3} = 1+\sqrt{x+1} \Rightarrow 2x+3 = 1+(x+1)+2\sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 = 2\sqrt{x+1}$

Hueco 2: $(x+1)^2 = 4(x+1) \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -1$

Hueco 3: $x = 3$: $\sqrt{9} - \sqrt{4} = 1$ ✓. $x = -1$: $\sqrt{1} - \sqrt{0} = 1$ ✓. Las dos son válidas.

Ficha 12 · Ecuaciones con valor absoluto (ficha en la pág. 35)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: -5

Hueco 3: -8

Hueco 4: 5

Guiado 2

Hueco 1: $2x-1 = x+4 \Rightarrow x = 5$; $\quad 2x-1 = -x-4 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$

Hueco 2: $x = 5$: $|9| = 9 = 5+4$ ✓. $x = -1$: $|-3| = 3 = -1+4$ ✓. Las dos son válidas.

Ficha 13 · Problemas de obreros y grifos con ecuaciones (ficha en la pág. 37)

Guiado 1

Hueco 1: 1,5

Hueco 2: $\frac{2}{3}$

Hueco 3: 3

Hueco 4: 1

Hueco 5: una hora

Guiado 2

Hueco 1: En 4 horas, entre las dos hacen el pedido: $\frac{4}{12} + \frac{4}{x} = 1$

Hueco 2: $\frac{4}{x} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$

Hueco 3: La impresora rápida, sola, tardaría 6 horas.

Ficha 14 · Ecuaciones exponenciales: potencias de igual base (ficha en la pág. 40)

Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: 5

Hueco 3: -2

Hueco 4: -1

Guiado 2

Hueco 1: $3^x \cdot 3 + 3^x = 108 \Rightarrow 3^x\,(3+1) = 108$

Hueco 2: $3^x = \dfrac{108}{4} = 27$

Hueco 3: $3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

Ficha 15 · Qué es un logaritmo: calcular logaritmos (ficha en la pág. 43)

Guiado 1

Hueco 1: 4

Hueco 2: 4

Hueco 3: -2

Hueco 4: -2

Hueco 5: -3

Hueco 6: -3

Guiado 2

Hueco 1: $\left(3^{1/2}\right)^x = 3^2 \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 9 = 4$

Hueco 2: $\dfrac{1}{32} = 2^{-5}\colon\ \log_2 \dfrac{1}{32} = -5$

Hueco 3: $\left(2^2\right)^x = 2^3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \log_4 8 = \dfrac{3}{2}$

Ficha 16 · Logaritmos: calcular la base o el número (ficha en la pág. 46)

Guiado 1

Hueco 1: 5

Hueco 2: 5

Hueco 3: $\frac{1}{9}$

Hueco 4: $\frac{1}{2}$

Guiado 2

Hueco 1: $a^{3/2} = 2^3 = \left(2^2\right)^{3/2} = 4^{3/2} \Rightarrow a = 4$

Hueco 2: $y = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^{4/2} = 2^2 = 4$

Hueco 3: $a^3 = \dfrac{1}{27} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$

Ficha 17 · Propiedades de los logaritmos (ficha en la pág. 49)

Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: 10

Hueco 3: 2

Hueco 4: 100
Hueco 5: 2

Guiado 2

Hueco 1: $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0{,}778$; $\log 1{,}5 = \log 3 - \log 2 \approx 0{,}176$

Hueco 2: $\log 8 = 3\log 2 \approx 0{,}903$; $\log_2 3 = \dfrac{\log 3}{\log 2} \approx \dfrac{0{,}477}{0{,}301} \approx 1{,}58$

Ficha 18 · Ecuaciones logarítmicas (ficha en la pág. 52)

Guiado 1

Hueco 1: 2
Hueco 2: 4
Hueco 3: 7
Hueco 4: 14

Guiado 2

Hueco 1: $\log x^2 - \log(x-2) = \log \dfrac{x^2}{x-2}$, así que $\log \dfrac{x^2}{x-2} = \log 8$
Hueco 2: $x^2 = 8(x-2) \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$ (doble)
Hueco 3: $x = 4$: $\log 4$ y $\log 2$ existen. Válida.

Ficha 19 · Ecuaciones logarítmicas: dos trucos (ficha en la pág. 55)

Guiado 1

Hueco 1: 2
Hueco 2: 1
Hueco 3: 10

Guiado 2

Hueco 1: $\log(2x^2+1) = 2\log(x+1) = \log(x+1)^2 \Rightarrow 2x^2+1 = x^2+2x+1$
Hueco 2: $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$
Hueco 3: $x = 0$: $\log(0+1) = \log 1 = 0$ en el denominador: no se puede dividir entre 0, no vale. $x = 2$: $\dfrac{\log 9}{\log 3} = \dfrac{2\log 3}{\log 3} = 2$ ✓. Solución: $x = 2$.

Ficha 20 · Sistemas 2×2: sustitución e igualación (ficha en la pág. 58)

Guiado 1

Hueco 1: $6y - y$ (es decir, $7y$)
Hueco 2: -14
Hueco 3: 2
Hueco 4: 2
Hueco 5: 3

Guiado 2

Hueco 1: $y = 2x - 1$ y $y = \dfrac{17 - 4x}{3}$

Hueco 2: $2x - 1 = \dfrac{17 - 4x}{3} \Rightarrow 6x - 3 = 17 - 4x \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2$

Hueco 3: $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Ficha 21 · Sistemas 2×2: reducción (ficha en la pág. 61)

Guiado 1

Hueco 1: 8

Hueco 2: 2

Hueco 3: 6

Hueco 4: 3

Guiado 2

Hueco 1: m.c.m.(4, 6) = 12: la primera por 3 y la segunda por −2: $12x + 9y = 15$ y $-12x - 10y = -14$

Hueco 2: Sumando: $-y = 1 \Rightarrow y = -1$

Hueco 3: $4x - 3 = 5 \Rightarrow x = 2$

Ficha 22 · Sistemas 3×3: método de Gauss (ficha en la pág. 64)

Guiado 1

Hueco 1: −9

Hueco 2: $2z$

Hueco 3: −21

Hueco 4: 3

Hueco 5: 2

Hueco 6: 1

Guiado 2

Hueco 1: E_1: $x - y + 2z = 5$; E_2: $2x + y - z = 3$; E_3: $3x + 2y + z = 10$. $-2E_1 + E_2$: $3y - 5z = -7$. $-3E_1 + E_3$: $5y - 5z = -5$.

Hueco 2: Restando las dos nuevas (la tercera menos la segunda): $2y = 2 \Rightarrow y = 1$; o, en escalera: $-5E'_2 + 3E'_3$: $10z = 20$.

Hueco 3: $z = 2$, $y = 1$, $x - 1 + 4 = 5 \Rightarrow x = 2$

Ficha 23 · Intervalos: desigualdad, intervalo y recta (ficha en la pág. 68)

Guiado 1

Hueco 1: $[4, +\infty)$

Hueco 2: relleno (●)

Hueco 3: $[-2, 6)$

Hueco 4: relleno (●)

Hueco 5: hueco (○)

Hueco 6: $x < 0$

Guiado 2

Hueco 1: $-1 < x \leq 7;\ (-1, 7]$

Hueco 2: b) $x < 2;\ (-\infty, 2)$. c) $x \geq -\frac{1}{2};\ \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Hueco 3: Punto hueco en -1, punto relleno en 7 y pintado el segmento entre los dos.

Ficha 24 · Inecuaciones de primer grado: el cambio de signo (ficha en la pág. 71)

Guiado 1

Hueco 1: 4

Hueco 2: $[4, +\infty)$

Hueco 3: 6

Hueco 4: $<$

Hueco 5: $(-\infty, -2)$

Guiado 2

Hueco 1: $-2x - 3x \leq 20 - 5 \Rightarrow -5x \leq 15 \Rightarrow x \geq -3$ (se divide entre -5: cambia el signo). $[-3, +\infty)$

Hueco 2: $-x > 8 \Rightarrow x < -8$ (se multiplica por 4 y se divide entre -1). $(-\infty, -8)$

Ficha 25 · Inecuaciones con paréntesis y fracciones (ficha en la pág. 74)

Guiado 1

Hueco 1: 2

Hueco 2: 3

Hueco 3: $(-\infty, 3]$

Guiado 2

Hueco 1: $6(x-1) - 3(2x+3) > 4x \Rightarrow 6x - 6 - 6x - 9 > 4x$

Hueco 2: $-15 > 4x \Rightarrow x < -\dfrac{15}{4}$ (se divide entre 4, positivo: el signo no cambia). $\left(-\infty, -\frac{15}{4}\right)$

Ficha 26 · Sistemas de inecuaciones (ficha en la pág. 77)

Guiado 1

Hueco 1: 6

Hueco 2: 2

Hueco 3: $[2, 6)$

Guiado 2

Hueco 1: $-2x \leq -4 \Rightarrow x \geq 2$ (se divide entre -2: cambia el signo)

Hueco 2: $x - 3 < 6 \Rightarrow x < 9$

Hueco 3: $[2, 9)$, es decir, $2 \leq x < 9$

Ficha 27 · Inecuaciones de segundo grado: la tabla de signos

(ficha en la pág. 80)

Guiado 1

Hueco 1: 3

Hueco 2: -2

Hueco 3: $+$

Hueco 4: $-$

Hueco 5: $+$

Hueco 6: $(-2, 3)$

Guiado 2

Hueco 1: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} = \dfrac{-4 \pm 6}{-2}$: $x = -1$, $x = 5$. $-(x+1)(x-5) \geq 0$

Hueco 2: $(-\infty, -1)$: $-$; $(-1, 5)$: $+$; $(5, +\infty)$: $-$ (el -1 delante cambia los signos de $(x+1)(x-5)$)

Hueco 3: Nos piden ≥ 0: positivo o cero. Las raíces entran: $[-1, 5]$

Ficha 28 · Inecuaciones de segundo grado: raíz doble o sin raíces

(ficha en la pág. 83)

Guiado 1

Hueco 1: $x - 3$

Hueco 2: 3

Hueco 3: $x = 3$

Guiado 2

Hueco 1: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-24}}{4}$: sin raíces reales. En $x = 0$ vale 3, positivo: es siempre positivo. Nunca es < 0: sin solución.

Hueco 2: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{-2}$: sin raíces. En $x = 0$ vale -5, negativo: es siempre negativo. Se cumple siempre: $\mathbb{R}$.

Ficha 29 · Inecuaciones racionales

(ficha en la pág. 85)

Guiado 1

Hueco 1: 1

Hueco 2: -4

Hueco 3: $+$

Hueco 4: $-$

Hueco 5: $+$

Hueco 6: $(-4, 1]$

Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{(x-2)(x+2)}{x} \geq 0$; raíces de arriba: -2 y 2; de abajo: 0

Hueco 2: $(-\infty, -2)$: $-$; $(-2, 0)$: $+$; $(0, 2)$: $-$; $(2, +\infty)$: $+$

Hueco 3: $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$: -2 y 2 entran (anulan el numerador); el 0 no (anula el denominador).

Ficha 30 · Inecuaciones racionales comparadas con un número

(ficha en la pág. 88)

Guiado 1

Hueco 1: $-2x + 6$

Hueco 2: 3

Hueco 3: 2

Hueco 4: $(2, 3]$

Guiado 2

Hueco 1: $\dfrac{2x + 1 - (x + 3)}{x + 3} > 0 \Rightarrow \dfrac{x - 2}{x + 3} > 0$

Hueco 2: Raíces: 2 (arriba) y -3 (abajo). $(-\infty, -3)$: $+$; $(-3, 2)$: $-$; $(2, +\infty)$: $+$

Hueco 3: $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$

Ficha 31 · Inecuaciones con valor absoluto (ficha en la pág. 91)

Guiado 1

Hueco 1: -1

Hueco 2: 3

Hueco 3: 5

Hueco 4: $[3, 5]$

Guiado 2

Hueco 1: $-7 < 5 - 3x < 7 \Rightarrow -12 < -3x < 2$

Hueco 2: Entre -3, negativo: cambian las dos desigualdades. $4 > x > -\dfrac{2}{3}$, es decir, $-\dfrac{2}{3} < x < 4$

Hueco 3: $\left(-\dfrac{2}{3}, 4\right)$

Examen tipo 1 · Soluciones (examen en la pág. 94)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Para quitar la raíz se elevan al cuadrado los dos miembros. Ese paso puede introducir soluciones falsas: por ejemplo, de $x = 2$ sale $x^2 = 4$, que también tiene la solución $x = -2$. Por eso hay que sustituir cada solución en la ecuación inicial y quedarse solo con las que la cumplen.

b) i) Bicuadrada: $z = x^2$. $z^2 - 5z - 36 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \dfrac{5 \pm 13}{2}$: $z = 9$ o $z = -4$. $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$; $x^2 = -4$ no tiene solución real. Soluciones: $x = 3$ y $x = -3$.

b) ii) $\sqrt{x+3} = x-3 \Rightarrow x+3 = x^2-6x+9 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow x=6$ o $x=1$. Comprobación: $x=6$: $\sqrt{9}+3=6$ ✓; $x=1$: $\sqrt{4}+3=5\neq 1$, falsa. Solución: $x=6$.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) $\log_a x = n$ significa que $a^n = x$: es el exponente al que hay que elevar la base para obtener x. Como la base es positiva, cualquier potencia suya es positiva: no hay ningún exponente n con $10^n = -10$. Por eso no existe el logaritmo de un número negativo (ni de 0).

b) i) $3^{x+1} = 3^x \cdot 3$ y $3^{x-1} = \dfrac{3^x}{3}$: $3^x\left(3+\dfrac{1}{3}\right) = 30 \Rightarrow 3^x \cdot \dfrac{10}{3} = 30 \Rightarrow 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

b) ii) $\log[(x+2)(x-1)] = \log 4 \Rightarrow x^2+x-2=4 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=2$ o $x=-3$. Con $x=-3$, $x+2=-1<0$: no vale. Solución: $x=2$ ($\log 4 + \log 1 = \log 4$ ✓).

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Un sistema escalonado tiene forma de escalera: la última ecuación tiene una incógnita, la anterior dos y la primera tres. Se resuelve de abajo arriba sustituyendo. El método de Gauss transforma cualquier sistema en uno escalonado eliminando incógnitas por reducción (multiplicando ecuaciones por números y sumándolas), en orden: primero la x de la 2.ª y la 3.ª ecuación, y después la y de la 3.ª.

b) i) $E_2 - E_1$: $-2y+z=-1$. $E_3 - 2E_1$: $-y-3z=-11$. Multiplicamos la última por -2 y sumamos con la anterior: $7z=21 \Rightarrow z=3$. $-2y+3=-1 \Rightarrow y=2$. $x+2+3=6 \Rightarrow x=1$.

b) ii) Aciertos a, fallos f: $a+f=20$ y $0{,}5a-0{,}25f=7$. Sustituyendo $f=20-a$: $0{,}5a-5+0{,}25a=7 \Rightarrow 0{,}75a=12 \Rightarrow a=16$. Acertó 16 y falló 4.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) Multiplicar por un número negativo da la vuelta al orden de los números: $2<5$, pero $(-1)\cdot 2=-2$ es mayor que $(-1)\cdot 5=-5$, es decir, $-2>-5$. Si no se cambiara el sentido, la desigualdad dejaría de ser cierta.

b) i) Raíces: $x=\dfrac{2\pm 6}{2}$: 4 y -2. $(x-4)(x+2)\leq 0$. Signos: + en $(-\infty,-2)$, − en $(-2,4)$, + en $(4,+\infty)$. Con $\leq$ las raíces entran: $[-2,4]$.

b) ii) $3x>6 \Rightarrow x>2$; $x\leq 8$. Se solapan entre 2 (sin incluir) y 8 (incluido): $(2,8]$.

Examen tipo 2 · Soluciones (examen en la pág. 96)

Problema 1 (2,5 puntos)

a) Puede tener dos soluciones distintas, una doble o ninguna real. Depende del signo del discriminante $\Delta = b^2-4ac$, lo que va dentro de la raíz en la fórmula: si $\Delta>0$, dos soluciones; si $\Delta=0$, una doble (± 0 da lo

mismo); si $\Delta < 0$, ninguna real (no existe la raíz cuadrada de un número negativo).

b) i) Divisores de 12. Con $x = 2$: Ruffini $1, -3, -4, 12 \to 1, -1, -6 \mid 0$. Queda $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ y $x = -2$. Soluciones: 2, 3 y -2; $(x-2)(x-3)(x+2)$.

b) ii) m.c.m. $= (x-1)(x+1)$: $x(x+1)+2(x-1) = 2(x^2-1) \Rightarrow x^2+3x-2 = 2x^2-2 \Rightarrow x^2-3x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 3$. Ninguna anula los denominadores ($x \neq \pm 1$): las dos son válidas.

Problema 2 (2,5 puntos)

a) $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$; $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log a^n = n \log a$.

b) i) $\log_2 \dfrac{1}{8} = -3$ (porque $2^{-3} = \frac{1}{8}$); $\log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{3/2} = \dfrac{3}{2}$; $\log 0{,}01 = -2$. $\quad -3 + \dfrac{3}{2} - (-2) = \dfrac{1}{2}$.

b) ii) $\log x^2 = \log(4x - 3) \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ o $x = 3$. Comprobación: con $x = 1$, $\log 1 = 0$ y $4 - 3 = 1 > 0$; con $x = 3$, $x > 0$ y $9 > 0$. Las dos son válidas.

Problema 3 (2,5 puntos)

a) Consiste en multiplicar las ecuaciones por números adecuados para que, al sumarlas, desaparezca una incógnita. Conviene cuando ninguna incógnita está despejada o es fácil de despejar (todas tienen coeficientes distintos de 1), porque así se evitan las fracciones.

b) i) Para eliminar la y: la primera por 3 y la segunda por 2: $9x - 6y = 12$ y $10x + 6y = 26$. Sumando: $19x = 38 \Rightarrow x = 2$. $6 - 2y = 4 \Rightarrow y = 1$.

b) ii) Hijo h, padre p: $p = 3h$ y $p - 5 = 4(h-5)$. $3h - 5 = 4h - 20 \Rightarrow h = 15$, $p = 45$. El hijo tiene 15 años y el padre 45.

Problema 4 (2,5 puntos)

a) En $(-2, 3)$ los extremos no están incluidos: $-2 < x < 3$, puntos huecos en la recta. En $[-2, 3]$ sí lo están: $-2 \leq x \leq 3$, puntos rellenos. Los dos pintan el trozo de recta entre -2 y 3.

b) i) Raíces: 3 (arriba) y -2 (abajo). Signos: + en $(-\infty, -2)$, − en $(-2, 3)$, + en $(3, +\infty)$. Con $\geq$: entra el 3 pero no el -2 (anula el denominador): $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$.

b) ii) $-5 \leq 2x - 1 \leq 5 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$: $[-2, 3]$.

Resumen de reglas

Primer grado	Quitar paréntesis → quitar denominadores (m.c.m.; ¡el menos delante de una fracción cambia todo el numerador!) → agrupar → despejar.
Segundo grado	$ax^2+bx+c=0$: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Incompletas: $ax^2+c=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-c/a}$; $ax^2+bx=0 \Rightarrow x(ax+b)=0$. $\Delta>0$: dos; $\Delta=0$: doble; $\Delta<0$: ninguna real.
Grado mayor	Bicuadradas: $z=x^2$. Ruffini: probar divisores del término independiente. Sin término independiente: factor común.
Racionales e irracionales	Racionales: m.c.m., quitar denominadores y **comprobar** que no se anula ninguno. Irracionales: aislar la raíz, elevar al cuadrado y **comprobar**.
Valor absoluto	$\lvert A\rvert=k \Rightarrow A=k$ o $A=-k$ (comprobar). $\lvert A\rvert<k \Rightarrow -k<A<k$.
Exponenciales	Misma base: $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Rightarrow f(x)=g(x)$. $a^{x+1}=a^x\cdot a$; $\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$.
Logaritmos	$\log_a x=n \Leftrightarrow a^n=x$. $\log(ab)=\log a+\log b$; $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$; $\log a^n=n\log a$; $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$; $\log_a b=\dfrac{\log b}{\log a}$. Solo existe el logaritmo de números positivos.
Sistemas	Sustitución, igualación o reducción. Gauss: escalonar eliminando incógnitas por reducción y resolver de abajo arriba.
Inecuaciones	Igual que las ecuaciones, pero al multiplicar o dividir por un **negativo** se cambia el sentido. Segundo grado y racionales: factorizar y tabla de signos. Con $\leq/\geq$ las raíces del numerador entran ([ ]); las del denominador, nunca.

Hoja de seguimiento

Marca cada ejercicio cuando te salga sin mirar el solucionario.

Ficha	Tema	Guiado 1	Guiado 2	Examen	Repasar
1	Ecuaciones de primer grado con paréntesis y fracciones	☐	☐	☐	☐
2	Del enunciado a la ecuación: lenguaje algebraico	☐	☐	☐	☐
3	Ecuaciones de segundo grado incompletas	☐	☐	☐	☐
4	Ecuación completa: la fórmula	☐	☐	☐	☐
5	Solución doble y ecuaciones sin solución	☐	☐	☐	☐
6	Ecuaciones bicuadradas: cambio de variable	☐	☐	☐	☐
7	Ecuaciones de grado 3 y 4 por Ruffini	☐	☐	☐	☐
8	Si falta el término independiente: factor común	☐	☐	☐	☐
9	Ecuaciones con la x en el denominador	☐	☐	☐	☐
10	Ecuaciones con una raíz	☐	☐	☐	☐
11	Ecuaciones con dos raíces	☐	☐	☐	☐
12	Ecuaciones con valor absoluto	☐	☐	☐	☐
13	Problemas de obreros y grifos con ecuaciones	☐	☐	☐	☐
14	Ecuaciones exponenciales: potencias de igual base	☐	☐	☐	☐
15	Qué es un logaritmo: calcular logaritmos	☐	☐	☐	☐
16	Logaritmos: calcular la base o el número	☐	☐	☐	☐
17	Propiedades de los logaritmos	☐	☐	☐	☐
18	Ecuaciones logarítmicas	☐	☐	☐	☐
19	Ecuaciones logarítmicas: dos trucos	☐	☐	☐	☐
20	Sistemas 2×2: sustitución e igualación	☐	☐	☐	☐
21	Sistemas 2×2: reducción	☐	☐	☐	☐
22	Sistemas 3×3: método de Gauss	☐	☐	☐	☐
23	Intervalos: desigualdad, intervalo y recta	☐	☐	☐	☐
24	Inecuaciones de primer grado: el cambio de signo	☐	☐	☐	☐
25	Inecuaciones con paréntesis y fracciones	☐	☐	☐	☐
26	Sistemas de inecuaciones	☐	☐	☐	☐
27	Inecuaciones de segundo grado: la tabla de signos	☐	☐	☐	☐
28	Inecuaciones de segundo grado: raíz doble o sin raíces	☐	☐	☐	☐
29	Inecuaciones racionales	☐	☐	☐	☐
30	Inecuaciones racionales comparadas con un número	☐	☐	☐	☐
31	Inecuaciones con valor absoluto	☐	☐	☐	☐
Examen tipo 1	nota: _____			☐	☐
Examen tipo 2	nota: _____			☐	☐

Recursos complementarios



Lista de reproducción «Matemáticas secundaria»: los vídeos de este cuaderno

https://todosobresaliente.com/v/ecuaciones-lista



Web de TodoSobresaliente: www.TodoSobresaliente.com

https://www.todosobresaliente.com